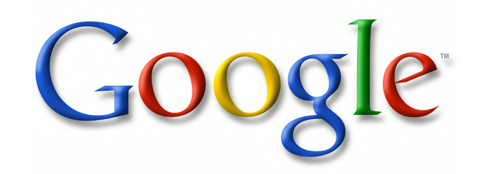


This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

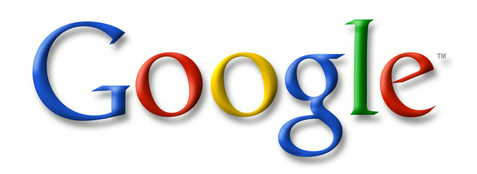
Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`



Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.
+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.
+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.
+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

Math 8003.1



Harvard College Library

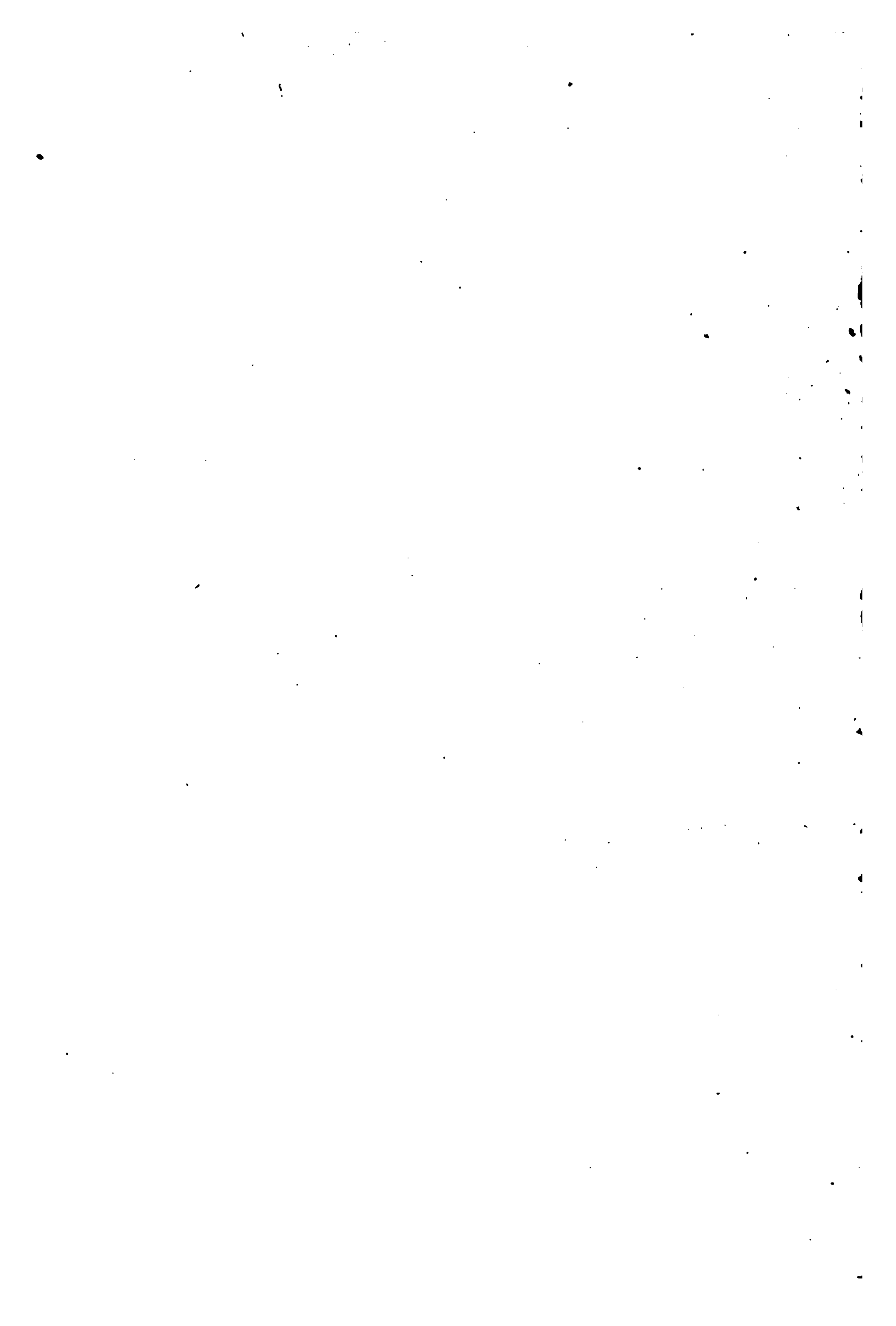
BOUGHT WITH INCOME

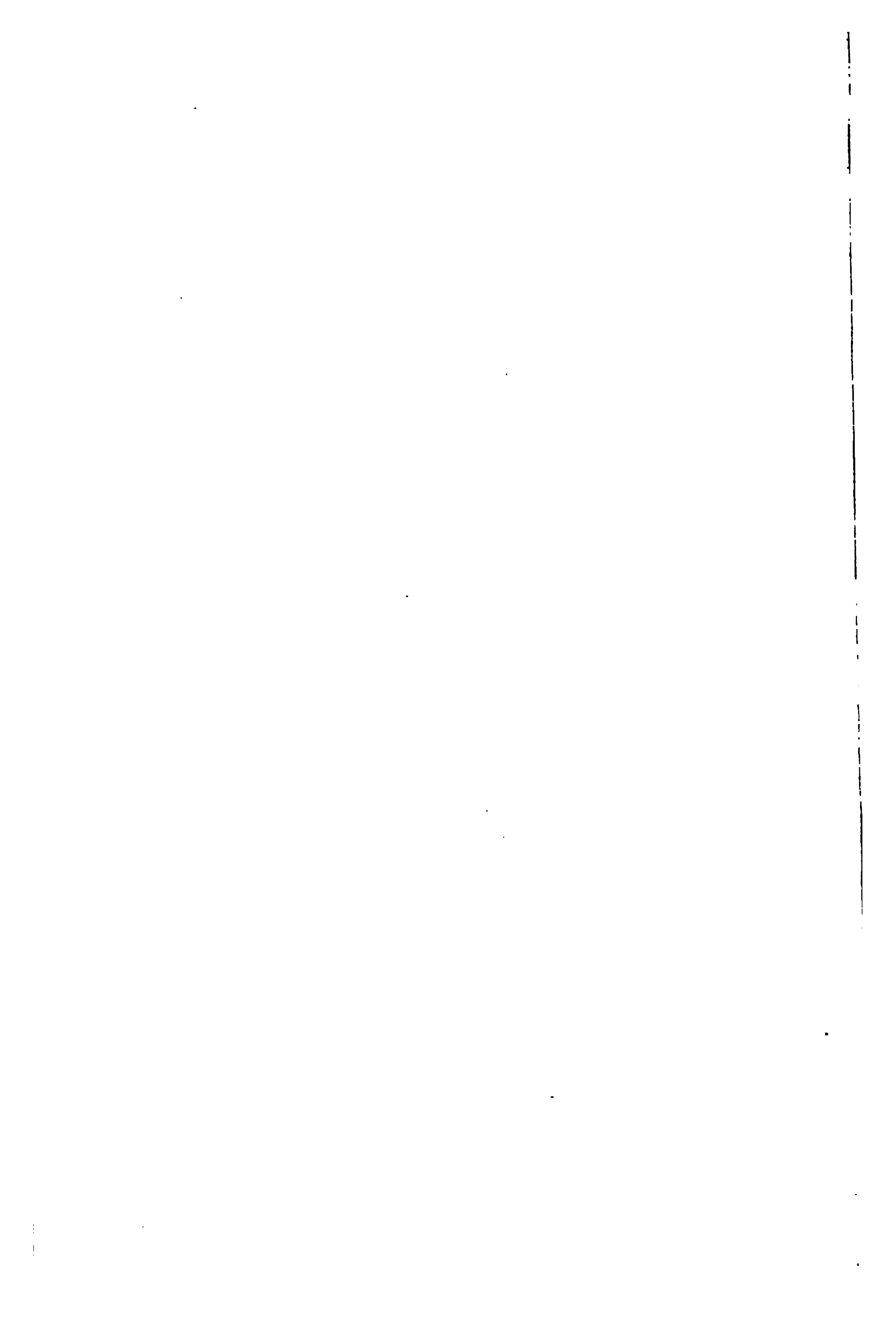
FROM THE BEQUEST OF

HENRY LILLIE PIERCE,

OF BOSTON.

Under a vote of the President and Fellows
October 24, 1898.





VORLESUNGEN

ÜBER

GESCHICHTE DER TRIGONOMETRIE

VON

DR. A. VON BRAUNMÜHL

O. PROFESSOR DER MATHEMATIK AN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE ZU MÜNCHEN.

ZWEITER TEIL.

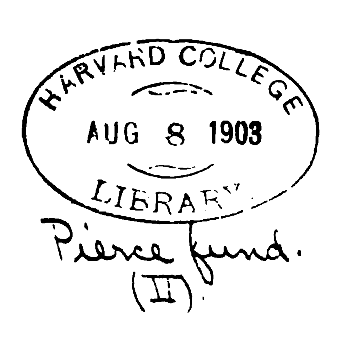
VON DER ERFINDUNG DER LOGARITHMEN BIS AUF DIE GEGENWART.

MIT 39 FIGUREN IM TEXT.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1903.


HARVARD COLLEGE
AUG 8 1903
LIBRARY
Pierce fund.
(II)

ALLE RECHTE, EINSCHLIESZLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN.

Vorwort.

In der Vorrede zum ersten Teil dieser Vorlesungen habe ich bereits die Gesichtspunkte aufgestellt, die mir für die Abfassung des ganzen Werkes maßgebend waren, so daß ich hierüber nichts weiter mehr beizufügen brauche; nur mag noch erwähnt werden, daß ich im vorliegenden zweiten Teile von einer Rücksichtnahme auf die politische Geschichte abstehen zu dürfen glaubte, da die Wissenschaft vom 17. Jahrhundert ab durch den wachsenden Verkehr immer mehr internationalen Charakter annahm.

Was aber die Begrenzung des Stoffes anlangt, so habe ich noch einige Bemerkungen zu machen. Ich versprach, die geschichtliche Entwicklung der Trigonometrie bis zur Gegenwart fortzuführen; dies ist auch geschehen, aber nur unter beständigem Kampf mit der Fülle des ins Enorme wachsenden Stoffes, aus dem ich nur diejenigen Arbeiten herauszufinden suchte, welche unserer Wissenschaft einen wirklichen Fortschritt gebracht haben. Da aber die Trigonometrie im Laufe der Zeit mit einer ganzen Reihe anderer mathematischer Wissensgebiete in engste Fühlung trat — ich nenne außer Astronomie und Geodäsie nur die im 18. Jahrhundert entstandene elementare und höhere Analysis und im Anschlusse hieran die Funktionentheorie — so galt es, entweder von vornherein auf Übergriffe in diese Gebiete ganz zu verzichten und sich nur auf die elementare Trigonometrie zu beschränken, oder doch diejenigen Dinge herüberzunehmen, welche selbst wieder befruchtend und erweiternd auf das Gebiet unserer Wissenschaft einwirkten. Ich entschloß mich zu letzterem, da ich glaube, daß hierdurch die Darstellung wesentlich an allgemeinem Interesse gewinnen wird; allerdings muß ich das Urteil darüber, inwieweit es mir gelungen ist, jederzeit die richtige Grenze eingehalten zu haben, meinen Lesern überlassen, die jedoch zugeben werden, daß einem gewissen subjektiven Empfinden hierbei die Berechtigung nicht abgesprochen werden darf.

Die äußerst günstige Aufnahme, die der erste Teil dieser Vorlesungen bei allen Sachverständigen gefunden hat, läßt mich die

Hoffnung hegen, daß der große Aufwand an Zeit und Mühe, den die Abfassung dieses Bandes in noch weit höherem Maße als die des ersten forderte, nicht ganz umsonst gewesen sei; und wenn es mir vielleicht gelingen sollte, in einem oder dem andern meiner Leser die Lust zu ernster und gewissenhafter Forschung auf einem Spezialgebiete der Geschichte der Mathematik zu erwecken, so wäre ich dadurch reichlich belohnt.

Zum Schlusse obliegt mir noch die angenehme Pflicht, meinem Assistenten Herrn F. Thiersch für die Beihilfe, die er mir bei der Korrektur zuteil werden ließ, sowie dem Herrn Verleger für sein Entgegenkommen bezüglich der raschen Förderung des Druckes und für die gediegene Ausstattung des ganzen Werkes meinen Dank auszusprechen.

Ich füge noch einige Ergänzungen und Berichtigungen zum ersten Teile bei, die teils durch die fortschreitende Forschung notwendig wurden, teils mir inzwischen durch gütige Mitteilung von verschiedenen Seiten zukamen.

S. 8, Zeile 14 von unten lies $\sqrt{2} > \frac{7}{5}$, statt $< \frac{7}{5}$.

S. 9. Die hier ausgesprochene Vermutung über die Entstehung der Formeln für die Polygonsinhalte hat inzwischen eine direkte Bestätigung durch W. Schmidt erfahren, der ihre Richtigkeit aus Herons Metrika nachwies. Bibl. math. I, 1900, 319—320.

S. 10—14. Die hier mitgeteilte graphische Methode der Griechen hat H. Zeuthen noch eingehender untersucht (Bibl. math. I, 1900, 20—27) und gefunden, daß die von mir S. 38—41 den Indern zugewiesene rechnerische Behandlung derselben sich in der Hauptsache auch schon im Analemma des Ptolemäus findet. Die angezogene Arbeit des Herrn Zeuthen muß daher bei der Lektüre der §§ 1, Kap. 2 und 2, Kap. 3 berücksichtigt werden. — S. 14, Zeile 3 von unten lies Hultsch statt Heiberg.

S. 14—19. Das hier über die Sphärik des Menelaus Mitgeteilte erfährt durch die soeben erschienenen vortrefflichen „Studien über Menelaus' Sphärik, welche Herr A. A. Björnbo nach neuem handschriftlichen Material anstellte, noch verschiedene Ergänzungen. So gehört von der S. 15, Zeile 17—19 angeführten prop. XX nur die erste Hälfte dem Menelaus, die zweite dem Maurolicus an; die Zeile 21—23 erwähnte Bemerkung ist ebenfalls dem letzteren zuzuschreiben; dagegen gehören der S. 28 bei Theon gefundene Satz, die S. 62 unten dem Ibn Junos zugeschriebene zweite Formel und die S. 152 von Maurolicus für sich in Anspruch genommene Theorie bereits dem Menelaus an. — S. 19, Zeile 6 lies *τμήματα* statt *τρήματα*; Zeile 15 $3\frac{10}{71}$ statt $3\frac{10}{17}$.

S. 20, Zeile 1 „Bögen“ statt „Längen“.

S. 21, Zeile 14 von unten „nächstvorhergehende“ statt „nächste“.

S. 22, Zeile 17 von unten „Minuten“ statt „Sekunden“.

S. 29. Unter den griechischen Schriftstellern nach Ptolemäus, bei denen sich vereinzelt trigonometrische Sätze finden, sind noch Pappus und Serenus aus Antinoeia zu nennen. Vgl. Näheres bei G. Loria, Le scienze esatte nell' Antica Grecia, lib. III.

S. 36 letzte Zeile p. (22) statt p. (24).

S. 40, Zeile 6 von unten $(= CE - \cos t_0)$ statt $(= CE + \cos t_0)$.

S. 46, Zeile 16 muß stehen Isḥâk ben Ḥunain; ebenda Anm. 3 ist noch zu erwähnen, daß ein Manuskript der Schrift „De figura sectoris“ sich im Cod. Paris. Arsenalis 1035 befindet. Björnbo teilte mir mit, daß eine Einsicht dieses Codex meine auf S. 47 ausgesprochene Vermutung, Tâbit habe schon die Regel der 4 Größen gefunden, nicht bestätigt.

S. 48, Zeile 4 lies 773 statt 772. Ebenda Anm. 5 ist folgende neue Ausgabe des Werkes von Al-Battâni zu erwähnen: Al-Battâni, sive Albatenii opus astronomicum. Ad fidem codicis escurialensis arabice editum, latine versum, adnotationibus instructum. Pars III Textum arabicum continens, à Carlo Alphonso Nallino. Milano 1899.

S. 49, Zeile 15, S. 50, Anm. 1 und Register lies Ruska statt Raska.

S. 53, Zeile 1: $\triangle DD'A'$ statt $\triangle DD'A$.

S. 57, Zeile 8: $\sin (\frac{15}{32})^0$ statt $\sin (\frac{18}{32})^0$. Bezüglich der Einführung der Schatten teilt H. Suter in: Die Mathematiker und Astronomen der Araber, 1900, 209 mit, daß schon Ḥabaš unter dem Khalifen Al-Mamûn dieselben verwendet habe.

S. 60, Zeile 28 lies 1048 statt 1038 oder 1039 (nach Suter a. a. O.).

S. 62, Zeile 9 lies 1009 statt 1008 (nach Suter a. a. O.).

S. 64, Anm. 6 ist zu erwähnen, daß Alhazens Schrift über die Kreisquadratur von Suter in Zeitschr. für Math. u. Phys. XLIV, hist. lit. Teil 33—47 bereits veröffentlicht ist.

S. 67, Zeile 4 von unten und S. 249 lies Al-Châzin statt Al-Châzim.

S. 70, Zeile 15: Willebrord statt Willebrod.

S. 72, Zeile 27 lies 1524/25 statt 1412 (nach Suter a. a. O.).

S. 73. Die in den letzten Zeilen der Anm. 2 zu S. 72 ausgesprochene Vermutung, daß auch Al-Zarkâli das dort mitgeteilte Divisionsverfahren kannte, hat sich nicht bestätigt, nachdem M. Curtze einen Auszug aus einer Handschrift der Canones in Bibl. math. I, 1900, 337—347 veröffentlichte.

S. 74. Nach brieflicher Mitteilung von H. Suter heißt Arzachel: Abû Isḥâk Ibrâhîm ibn Jaḥjâ al-Zarkâli. — Dschâbirs Todesjahr soll zwischen 1140 und 1150 fallen (Suter a. a. O. 119).

S. 74, Zeile 14 lies $(A + y_1)^3$ statt $A + y_1$.

S. 78. M. Curtze hat am a. o. a. O. meine Vermutung bestätigt, daß die hier mitgeteilte Methode der Tafelberechnung eine direkte Abschrift aus Al-Zarkâlis Canones ist.

S. 78, Zeile 18 fehlt vor den beiden Wurzeln der Faktor $\frac{1}{2}$.

S. 79, Anm. 3. Die Delambre entnommene Notiz, daß Al-Zarkâli sich neben einem Radius von 150′ auch eines solchen von 60^p bediente, ist nach M. Curtze a. a. O. 346 Anm. nicht richtig; er gebrauchte nur den ersteren.

S. 79, Zeile 2: $37\frac{1}{2}$ statt $73\frac{1}{2}$.

S. 89, Zeile 8: „ihrem“ statt „seinem“.

S. 90, Zeile 3: 1204 statt 1284.

S. 93, Anm. 4. Die hier erwähnte älteste Sehnentafel in einem lateinischen Werk (1116) ist inzwischen von M. Curtze veröffentlicht worden (Bibl. math. I, 1900, 330 und Urkunden zur Geschichte der Mathem., Abhandl. zur Gesch. der Math. XII, I, Leipzig 1902, 108).

S. 94, Zeile 25 ist zu streichen: „vielleicht der erste“, da Curtze a. e. a. O. nachgewiesen hat, daß die Übersetzung des Liber Embadorum durch Plato von Tivoli den Übersetzungen Atelharts vorausgeht.

S. 102, Anm. 1. Dieses Manuskript hat Curtze inzwischen veröffentlicht. Bibl. math. I, 1900, 353—372.

S. 103, Anm. 3. Durch F. Hultsch (Abhandl. zur Gesch. der Mathem. IX, 1899, 193—209) ist es wahrscheinlich gemacht, daß dieses Instrument aus den Dioptra Hipparchs entstanden ist.

S. 104, Anm. 1. Diese Handschrift ist inzwischen von Curtze veröffentlicht. Bibl. math. I, 1900, 372—380.

S. 106, Anm. 2. Von Curtze veröffentlicht, ebenda 380—390.

S. 107. Dem Zeile 21—22 ausgesprochenen Wunsche, Näheres über die Canones des Joh. de Lineriis zu erfahren, ist Curtze nachgekommen, indem er in Bibl. math. I, 390—413 das Wichtigste aus Cod. Basil. F. II, 7 veröffentlichte und außerdem auch die Sinusrechnung des Joh. de Muris beifügte, ebenda 413—416. Aus diesen Handschriften ergibt sich, daß der erstere sinus, sinus versus, umbra recta und umbra versa definiert und mit ihnen rechnet, daß er aus Al-Zarkâli die Berechnung der Sinustafel für den Radius 150′ herübernahm, außerdem aber noch eine zweite Sinustafel für halbe Grade und den Durchmesser 120^p herstellte, daß er ferner eine Schattentafel für den Durchmesser 12 und einzelne Grade des Quadranten

berechnete und endlich eine Proportionstafel zur Erleichterung der Interpolation angab. Joh. de Muris aber gab eine wenn auch an Al-Zarkâli anschließende, doch ziemlich selbständige Berechnung der Sinusfunktion, die die schwerfällige Figur Zarkâlis (vgl. S. 78 dieses Werkes) durch eine einfachere ersetzt.

S. 113, Zeile 5 sollte bemerkt sein, daß Cusanus die für $n = \infty$ abgeleitete Gleichung (in dieser Zeile) auch für $n = 4$, $n = 6$ u. s. w., natürlich ohne jede Berechtigung, als richtig annimmt.

S. 115, Zeile 24 ist der Satz „Nachahmung . . .“ zu streichen und dafür auf Stevin hinzuweisen, der 1583 in La disme Art. V die zentesimale Teilung des Winkels vorschlug.

S. 126, Zeile 16 von unten muß es heißen: $me = \sqrt{eg^2 - mg^2}$.

S. 127, Anm. 3 kann bemerkt werden, daß Regiomontan in einem Briefe an Bianchini ausdrücklich Dschâbir erwähnt, und eine zweite Stelle dieses Briefes bestätigt meine Vermutung (S. 129—130), daß das III. Buch von Regiomontans Dreiecksbüchern erst später beigefügt wurde. (Curtze, Urkunden zur Gesch. der Mathem., Abhandl. zur Gesch. der Math. XII, I, Leipzig 1902, 243, 304.)

S. 128, Zeile 16 von unten: IV. Buches statt V. Buches.

S. 134, Zeile 3. Inzwischen hat A. A. Björnbo in der Vatikanischen Bibliothek ein Manuskript von Werners „De triangulis libri V“ aufgefunden, dessen Inhalt meine S. 135 aufgestellte Behauptung über die Erfindung der Prosthaphäresis vollauf bestätigt. (Vgl. hierüber Eneström Bibl. math. 1902, 242.) Der genannte Gelehrte plant eine Herausgabe der Handschrift, deren Wichtigkeit für die Geschichte der Trigonometrie ich genügend betont habe.

S. 140, Anm. 1. Der hier als „Selbstanzeige“ bezeichnete Commentariolus des Coppernicus ist nach den neuesten Untersuchungen von L. A. Birkenmajer (Nicolas Copernic. Première partie: Études sur les travaux du célèbre astronome et matériaux pour servir à sa biographie. Extrait du Bulletin de l'Académie des sciences de Cracovie. Classe des sci. mathém. Mars 1902, p. 205 und 209) nicht sowohl eine Voranzeige der Revolutionen, als vielmehr eine selbständige Schrift über ein heliozentrisches System mit zwei Epizykeln, das Coppernicus schon vor 1512 ausgearbeitet hat.

S. 142, Zeile 2. Nach eingehenden Untersuchungen von L. A. Birkenmajer lernte Coppernicus den Geber schon 1493 oder 1495 von seinem Lehrer Brudzewo kennen. Vgl. Mikołaj Kopernik. W. Krakowie, 1900, 235 ff.

S. 150 ist zu zitieren: Macrì: Francesco Maurolico nella vita e nelli scritti. Sec. ediz. Messina 1901.

S. 152. Der hier dem Maurolicus zugeschriebene Satz gehört dem Menelaus, sollte also etwa S. 18 angeführt sein. Dieser Irrtum kommt daher, daß Maurolicus diesen und noch einige andere Sätze in seine Sphärik aufnahm, während sie in Halleys Menelaus-Ausgabe (die ich nicht kannte) diesem zugewiesen sind und nach Björnbos Untersuchung der Handschriften von Menelaus' Sphärik ihm auch tatsächlich zugehören.

S. 158, Anm. 5. H. Bosmans wies nach, daß dies keine Neuauflage ist, sondern daß alte Exemplare mit neuem Titel versehen wurden. (Le traité des Sinus de M. Coignet 1901, 22 ff.)

S. 161. Den Gleichungen (1) bis (3) sind noch beizufügen: $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{2}\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)$, $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{2}\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)$; in Formel 4 fällt der Faktor 2 weg.

S. 175, Anm. 2 ist noch zu zitieren: Glaisher, Messenger of Mathem. II, 1872, 124—128 und Bierens de Haan, ebenda III, 1874, 24—26.

S. 176, Zeile 13 muß es heißen: $\frac{r}{2n}(2n \sin x - 1)$.

S. 179 lies in der Tabelle Decadis statt Decadio.

S. 187, Zeile 10 muß es heißen: Holstein-Gottorp.

S. 193, Zeile 26 lies Friedrich II. statt Christian II.

S. 194. Bei Christoph Rothmann ist noch zu bemerken, daß er eine ausgedehnte Sekantentafel berechnete, die aber nicht publiziert ist.

S. 196, Zeile 6: HK statt HR; letzte Textzeile 12834 statt 212834.

S. 197, Anm. 4, Zeile 4 von unten muß es heißen: erschienen in Abhandl. zur Gesch. der Math. IX, 15—29.

S. 198 muß in der Figur Punkt C auf DH liegen; Zeile 8 von unten lies secundum statt sesundum.

S. 200, Anm. 2. Das Manuskript ist nicht von Tycho selbst, sondern von einem seiner Schüler geschrieben. (Briefliche Mitteilung von H. F. R. Friis.)

S. 201, Zeile 16 von unten: Inv. III statt Inv. II.

S. 210, Anm. 4 ist ganz zu streichen, da Cataldis Divinum inventum sich auf die Kreisquadratur bezieht, wie mir die Einsicht eines durch die Güte von Herrn G. Loria zur Verfügung gestellten Exemplares der Schrift von Cataldi zeigte.

S. 223, Anm. 2. Vgl. über die verschiedenen Ausgaben von Pitiscus' Trigonometrie Gravelaar in Nieuwe Archief 3. Ser. III, 1898, 253. — Letzte Zeile lies Handson statt Hundson.

S. 227, Zeile 12 und 13 von unten sinvers c und sinvers $(A - B)$ statt sin c und sin $(A - B)$.

S. 230, Zeile 2, 3, 4 ist statt B, C und umgekehrt zu setzen.

S. 237, Anm. 2 zu S. 236 soll Zeile 8 von unten statt „stammt von Schuler" heißen: „steht schon bei Vieta (Hunrath, Abhandl. zur Geschichte der Mathem. IX, 226 oben) und folgt leicht aus Gleichung 3) S. 161.

S. 246, Zeile 12. Stampioens Tafeln sind ein genauer Abdruck der Tafeln von Lansberg mit allen Fehlern. (Briefliche Mitteilung von H. Grimmeißen.) Jean Jansz Stampioen ist 1610 in Rotterdam geboren und lebte noch 1689. Bierms de Haan in Zeitschrift für Math. und Phys. 1887, XXXII, Lit.-hist. Abtlg. 170.

S. 248, Zeile 5. Hier ist zu verweisen auf: Glaisher in Messenger of Mathem. III, 1874, 35—38. Grimberger hat nach Ludolf von Ceulen die Berechnung von π auf lange Zeit hinaus am weitesten getrieben und zwar mit Hilfe der Methode von Snellius.

München im Januar 1903.

A. v. Braunmühl.

Inhalt des zweiten Teiles.

1. Kapitel.

Die Erfindung der Logarithmen. § 1—5.

2. Kapitel.

Die Trigonometrie bis zum Beginn des 18. Jahrhunderts. § 1—3.

3. Kapitel.

Die Entwicklung der Trigonometrie im 18. Jahrhundert bis zum Auftreten Eulers. § 1—4.

4. Kapitel.

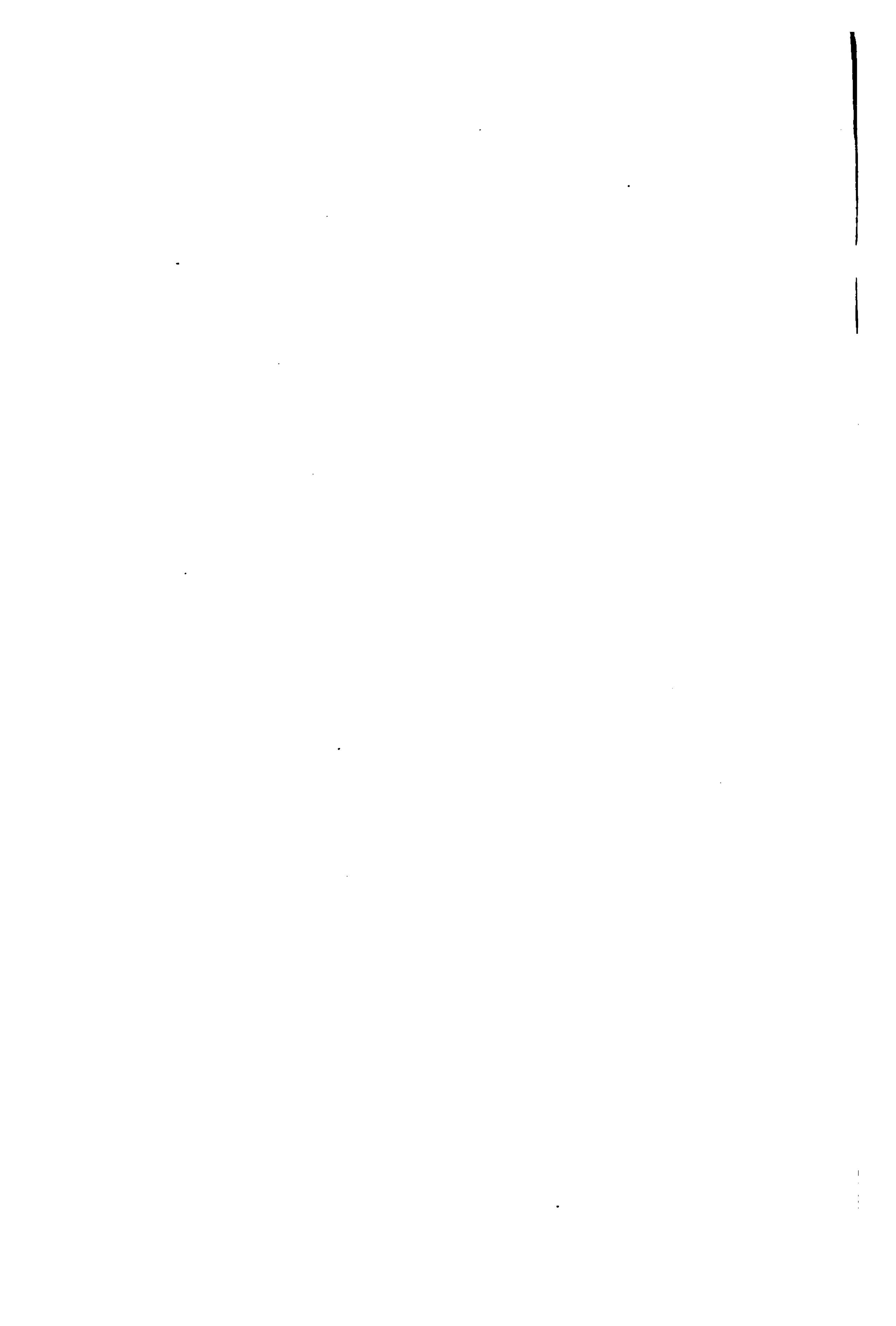
Leonhard Euler. § 1—3.

5. Kapitel.

Eulers Zeitgenossen und Nachfolger im 18. Jahrhundert. § 1—4.

6. Kapitel.

Die Trigonometrie im 19. Jahrhundert. § 1—8.



1. Kapitel.

Die Erfindung der Logarithmen und ihr Einfluß auf die Trigonometrie.

§ 1. Jobst Bürgi und John Neper.

Im ersten Teile unseres Werkes sahen wir, welche enorme Anstrengungen gemacht worden waren, um Tabellenwerke herzustellen, die eine Abkürzung der mühsamen trigonometrischen Rechnungen ermöglichten. Es war dies ein dringendes Bedürfnis geworden, da die praktischen Anwendungen der Trigonometrie immer mehr an Ausdehnung gewannen. Die Erfindung der prosthaphäretischen Methode bot allerdings die Möglichkeit, die so lästigen Multiplikationen und Divisionen durch die beqnemere Addition und Subtraktion zu ersetzen, hatte aber auch manche Nachteile, welche sich hauptsächlich darin konzentrierten, daß zu einer sicheren Anwendung derselben trigonometrische Tabellen mit großer Stellenzahl notwendig waren. Diese waren aber einerseits infolge ihres Umfanges unbequem zu gebrauchen, andererseits überstiegen die bedeutenden Kosten ihrer Anschaffung die Mittel so manchen Mathematikers oder Astronomen. Es darf daher nicht Wunder nehmen, wenn man darauf ausging, andere Methoden zu ersinnen, die sich besser zu praktischer Verwendung eigneten.

Da wir übrigens keine Geschichte der Rechnungsmethoden schreiben, so erwähnen wir auch jenes voluminöse Werk nur nebenbei, welches der bairische Kanzler und Gelehrte Hans Georg Herwarth (oder Hoerwarth) von Hohenburg (1553—1622)[1]) im Jahre 1610 erscheinen ließ, und das den Titel führt „Tabulae Arithmeticae *ΠΡΟΣΘΑΦΑΙΡΕΣΕΩΣ* universales", aber keineswegs die bekannte prosthaphäretische Methode behandelt, sondern vielmehr eine in riesigen Dimensionen ausgeführte Multiplikationstabelle darstellt. Dagegen haben wir die Erfindungsgeschichte der Logarithmen näher ins Auge zu fassen, weil sie ganz aus den Bedürfnissen der Trigono-

1) Vgl. hierüber Cantor II, 2, 721—722.

metrie herausgewachsen sind und eine völlige Umgestaltung derselben hervorriefen.

Zwei Männer sind es, welche fast gleichzeitig, wenn auch in sehr verschiedener Weise denselben genialen Gedanken zur Ausführung brachten. Der eine ist der uns durch seine mathematische und mechanische Begabung längst bekannte Jobst Bürgi, der andere der Schotte John Neper, welchem das Prioritätsrecht der Veröffentlichung zukommt. Bürgis bekannte Scheu, seine Geistesprodukte in Druck zu geben, sein Zaudern und seine Geheimniskrämerei, vielleicht auch Geldmangel, haben die Veröffentlichung seiner Schrift verzögert und ihn, wie um so manches andere, auch um den Ruhm der ersten Erfindung der Logarithmen gebracht. Seine „Arithmetische und Geometrische Progreßtabulen, sambt gründlichem unterricht, wie solche nützlich in allerley Rechnungen zu gebrauchen, und verstanden werden sol" sind nach den Untersuchungen von Gieswald, Cantor und anderen[1]) zwischen den Jahren 1603 und 1611 entstanden, aber erst 1620 im Druck erschienen.[2]) Nepers Werk dagegen kam bereits 1614 unter dem Titel „Mirifici Logarithmorum canonis descriptio" zu Edinburg in 4⁰. heraus, dürfte also ungefähr um dieselbe Zeit entstanden sein.

Bürgi geht bei Herstellung seiner Logarithmen von dem Ge-

1) Cantor II, 2, 725 und 729, wo auch ein Zeugnis Keplers angeführt wird. — 2) „Gedruckt, In der Alten Stadt Prag, bey Paul Sessen, der Löblichen Universität Buchdruckern, im Jahr 1620. in 4⁰." Von dieser Schrift fand R. Wolf, nachdem er sie lange vergebens gesucht hatte, endlich 1847 ein Exemplar auf der Münchner Hof- und Staatsbibliothek. Dasselbe ist mit Math. P. 55 ausgezeichnet und liegt uns vor. Es besteht aus 30 Quartblättern, trägt nur die Anfangsbuchstaben J. B. des Namens von Jobst Bürgi und enthält den im Titel angeführten gründlichen Unterricht nicht. Dieser scheint überhaupt nicht gedruckt worden zu sein, indem Benjamin Bramer, Bürgis Schwager, in der Vorrede zu seiner Schrift: „Beschreibung Eines sehr leichten Perspektiv und grundreissenden Instrumentes auff einem Stande", Cassel 1630 sagt: „Auss diesem Fundament hat mein lieber Schwager vnd Praeceptor Jobst Burgi vor zwantzig vnd mehr Jahren eine schöne progress tabul mit ihren Differentzen von 10 zu 10 in 9 Ziffern calculirt vnd zu Prag ohne Bericht, Anno 1620 drucken lassen. Vnd ist also die Invention der Logarith. nicht des Neperi, sondern von gedachtem Burgi (wie solches viele wissend vnd ihm auch Herr Keplerus zeugniss gibt) lange zuvor erfunden." Den hier erwähnten Bericht hat Gieswald auf der Danziger Stadtbibliothek handschriftlich einem Exemplar der Progreßtafeln angeheftet vorgefunden und im Drucke veröffentlicht. Gieswald „Justus Byrg als Mathematiker und dessen Einleitung in seine Logarithmen". Danzig 1856. Schulprogramm. Ein Auszug hiervon im Archiv für Math. und Phys. XXVI, 316—334. Vgl. über die Erfindung der Logarithmen auch Wilhelm Matzkas interessante Ausführungen, ebenda XXXIV, 1860, 341—354.

danken aus, die Glieder einer arithmetischen Reihe, die er die roten Zahlen nennt, in der Weise mit den Gliedern einer geometrischen Reihe — den schwarzen Zahlen — zusammenzustellen, daß die ersteren die Exponenten der nach den Potenzen von 2 fortschreitenden Glieder der letzteren Reihe sind. Die roten Zahlen waren somit die Logarithmen der schwarzen Zahlen. Dieser Gedanke war keineswegs neu, er fand sich vielmehr in den Schriften der damaligen Cossisten, wie z. B. in Michael Stifels „Arithmetica integra" 1544[1]) auseinandergesetzt, und Bürgi zitiert selbst einen gewissen Simon Jakob Mauritius Zons[2]), bei dem er diese Zuordnung fand. Die Bezeichnung Logarithmen, die er von Neper bereits bei Veröffentlichung seiner Schrift kennen mußte, hat er nicht angenommen, sondern hält beständig seine Unterscheidung von roter und schwarzer Zahl fest, und der Drucker hat sie durch die Farbe zum Ausdruck gebracht. Seine Tafel ist nach den roten Zahlen zu einer Tafel doppelten Eingangs angeordnet. Im vertikalen Eingang stehen auf jeder Seite die Nummern 0, 10, 20, $\cdots\cdot$ 500, im horizontalen dagegen laufen sie um 500 wachsend von 0 bis 230000 fort. Auf der letzten Seite ist noch eine nicht in dieses Schema passende Fortsetzung bis 230 270 022 beigegeben, der die schwarze Zahl 1 000 000 000 entspricht. Erstere heißt „die gantze Rote Zahl", letztere „die gantze Schwartze Zahl". Bürgis Progreßtafel war somit eigentlich eine Tafel der Antilogarithmen.

Vergleicht man nun die fortschreitenden roten Zahlen und die ihnen zugehörigen schwarzen in der Tafel, so sieht man, daß die zugrunde liegende arithmetische Reihe mit Null beginnt und die Differenz 10 besitzt, so daß man ihre Zahlen durch $x_n = 10n$ darstellen kann, während die geometrische Reihe mit 100 000 000 anfängt und den Quotienten 1,0001 hat; die schwarzen Zahlen können also in der Form $y_n = 10^8 \cdot 1{,}0001^n = 10^8\left(1 + \frac{1}{10^4}\right)^n$ geschrieben werden[3]) und wurden einfach erhalten, indem man zu jeder vorhergehenden ihren 10000sten Teil addierte. Diese willkürliche Zuordnung der beiden Reihen zeigt, daß Bürgi weit davon entfernt war, seiner Tafel eine Basis in unserem Sinne zugrunde zu legen, es mußten nur immer solche Glieder der beiden Reihen einander zugewiesen werden, welche gleichen Stellenzeiger besaßen. Will man dennoch von einer Basis der Tafel sprechen, so muß man die Zahlen Bürgis als Dezimalbrüche betrachten, indem man z. B. allen den Nenner 10^8 gibt, damit dem Logarithmus 0 der

1) Lib. I, 35. Nach Cantor II, 2, 350 läßt sich diese Zuordnung zuerst bei Nicolas Chuquet nachweisen, ist aber wahrscheinlich italienischen Ursprungs. — 2) Gieswald a. a. O. 27. — 3) Vgl. hierüber Wolf, H. A. I, 68 u. 69.

Logarithmand 1 und dem Logarithmus 1 die Basis b entspricht. Dann ergibt sich sofort: $b^0 = 1$, $b^{10} = 1{,}0001$, $b^{20} = 1{,}00020001$, woraus für $b = 1{,}000009990550012$ folgt.[1]) Die ganze rote Zahl 2,30270022, welche der schwarzen Zahl 10^9 entsprechen soll, genügt dann der Gleichung $b^{230270.022} = 100000 \cdot 0000$. Man kann aber genau mit demselben Rechte die Logarithmen Bürgis mit 10^5 und die schwarzen Zahlen mit 10^8 dividieren[2]), dann entspricht nach seiner Tafel der roten Zahl 1,00000 die schwarze Zahl 2,71814593, und es ist diese die Basis des Systems, welche nahe mit $e = 2{,}71828182\ldots$ zusammenstimmt und noch besser damit stimmen würde, wenn man Bürgis Faktor 1,0001 mit 1,000100005 vertauschen würde, was aber für die Berechnung der Tafel nichts weniger als vorteilhaft wäre.[3])

Um aber aus dieser Tafel Vorteil ziehen zu können, mußte man ein Interpolationsverfahren anwenden, das auch Bürgi in seinem „Unterricht" an Beispielen erläutert.[4]) Nun war aber die Unterweisung der gedruckten Tafel nicht beigegeben, und so mußte dieselbe für die meisten seiner Zeitgenossen unbrauchbar sein; in der That kam sie auch sehr wenig in Verwendung, während Nepers Werk bald den ihm gebührenden Eingang fand.

John Neper[5]) oder Napier, Baron von Merchiston ist 1550 unweit Edinburg geboren und 1617 gestorben. Er hielt sich mit Ausnahme einer 1571 unternommenen Reise durch Deutschland, Frankreich und Italien Zeit seines Lebens in Schottland auf und scheint sich seine mathematischen Kenntnisse hauptsächlich durch Bücherstudium angeeignet zu haben. Cantor bemerkt[6]), daß er Regiomontan, Coppernicus, Lansberg und Pitiscus kannte, denen wir noch Adrianus Metius beifügen, da die Schriften dieser Gelehrten in Nepers Descriptio erwähnt werden, und hat zweifelsohne[7]) auch Torporley, Thomas Fink und Michael Stifel gekannt, da er Bezeichnungen, die nur bei diesen Schriftstellern vorkommen, in seiner Schrift gebraucht. Mit Ausnahme Finks scheint uns dieses Beweis-

---

1) Vgl. hierüber: Beiträge zur höheren Lehre von den Logarithmen von W. Matzka, Archiv der Math. und Phys. XV, 1850, 176, wo diese Zahl berechnet ist. — 2) R. Wolf, H. A. I, 69. — 3) Allerdings zeigt Bürgis „Unterricht", daß er sehr wohl wußte, daß die Logarithmen zweier im Verhältnis von 10 : 1 stehender Zahlen eine konstante Differenz gleich seiner ganzen roten Zahl hatten, deren Vielfache also nötigenfalls addiert oder subtrahiert werden konnten, ohne die Werte der schwarzen Zahlen zu ändern. Es geht dies aus verschiedenen Beispielen hervor, die er daselbst gibt. Darin ist aber der Begriff einer Basis implizite enthalten, wenn er auch nicht wirklich erkannt wird. — 4) Gieswald a. a. O. 28 ff. oder Cantor II, 2, 728 ff. — 5) Biot in Mémoires of John Napier etc. Journal des Savants. Année 1835. 151 ff. — 6) Cantor II, 2, 703. — 7) Vgl. S. 186 des 1. Tl. dieses Werkes.

moment genügend; die direkte Kenntnis der Geometria rotundi aus dem Gebrauch des Wortes „tangens“ zu folgern, ist jedoch nicht zulässig, weil, wie wir früher sahen, dieser Terminus damals bereits vollständig eingebürgert war.

Aus diesen Schriften und den Anwendungen ihrer Methoden auf die Astronomie mag nun Neper erkannt haben, „daß“, wie er selbst sagt[1]), „in der praktischen Mathematik nichts so störend wirkt und die Rechner mehr hindert und belästigt, als die Multiplikationen, Divisionen, Quadrat- und Kubikwurzelziehungen aus großen Zahlen, welche außer dem lästigen Zeitverlust oftmals fehlerhafte Resultate verursachen“. Nach langen Überlegungen, wie man diesem Übelstande abhelfen könne, wurde er schließlich auf die Erfindung seiner Logarithmen geführt, denen er zuerst den Namen „numeri arteficiales“, dann die noch heute gebräuchliche Bezeichnung beilegte.[2])

In seiner „Descriptio“ hatte Neper versprochen, den Weg, den er bei Berechnung seiner Logarithmen einschlug, später bekannt zu machen[3]), aber erst nach seinem Tode erschien 1619 die Schrift „Mirifici Logarithmorum canonis Constructio“ zu Edinburg in 4⁰ von seinem Sohne Robert herausgegeben. Neper gab nicht, wie Bürgi, Logarithmen der natürlichen Zahlen, sondern durch die Überlegung geleitet, daß gerade in der Trigonometrie ein abkürzendes Rechnungsverfahren notthue, berechnete er sie für die Sinus der Bögen des Quadranten, die von Minute zu Minute fortschritten, und legte den Radius 10^7 zugrunde.

Der Gedanke der gliedweisen Zuordnung einer arithmetischen und einer geometrischen Reihe liegt auch seiner Betrachtungsweise zugrunde, aber derselbe wird anders als bei Bürgi begründet und ausgeführt. Da die Sinus stets in Teilen des Sinus totus AB (Fig. 1) ausgedrückt werden, so denkt er sich denselben in der Weise von einem von A ausgehenden Punkt durchlaufen, daß dieser in gleichen

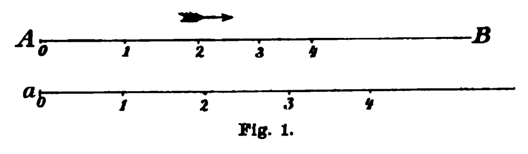


Fig. 1.

1) Vorrede zu Ed. Wrights englischer Übersetzung der Descriptio, die von seinem Sohne Samuel 1616 publiziert wurde; angeführt in „Scriptores logarithmici“ von Maseres Vol. I. XXXII in der daselbst abgedruckten Introduction of trigonometrical tables von Hutton und in der in Lyon 1620 erschienenen lateinischen Ausgabe. — 2) Descriptio. 5. Cap. II. prop. I, von λόγου ἀριθμός abgeleitet. In der früher geschriebenen, aber später veröffentlichten Constructio heißen die Logarithmen noch „numeri arteficiales“. — 3) Eine englische Übersetzung erschien neuerdings unter dem Titel „The construction of the wonderful canon of logatrithmens by John Napier Baron of Merchiston trans-

Zeiten Abschnitte $A_1, A_2, A_3 \cdots$, die in geometrischer Progression abnehmen, markiert, so daß die restierenden Strecken $B_0 = 10^7, B_1, B_2, B_3 \cdots$ die Sinus repräsentieren. Ist also der in der ersten Zeiteinheit durchlaufene (durchflossene) Weg $A_1 = \frac{1}{n}$ des ganzen Weges 10000000, der Sinus B_1 somit $\frac{n-1}{n} \cdot 10^7$, so ist die in der zweiten Zeiteinheit durchlaufene Strecke $\frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \cdot 10^7$, und der Sinus

$$B_2 = \left[\frac{n-1}{n} - \frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)\right] \cdot 10^7 = \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \cdot 10^7,$$

ebenso $A_3 = \frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \cdot 10^7$ und $B_3 = \left(\frac{n-1}{n}\right)^3 \cdot 10^7$. Dieser fallenden geometrischen Reihe der Sinus wird nun eine arithmetrische, die er sich durch einen mit gleichförmiger Geschwindigkeit bewegten Punkt auf einer zweiten unendlich langen Linie erzeugt denkt, in der Weise zugeordnet, daß den Gliedern obiger Reihe der B bezüglich die Wege $a_0 = 0$, $a_1 = \frac{1}{n} \cdot 10^7$, $a_2 = 2a_1$, $a_3 = 3a_1 \cdots$ entsprechen, die die Logarithmen darstellen. Während also die eine Reihe beständig abnimmt, wächst die andere fortwährend. Diese Verschiedenheit der Wachstumsrichtung steht bei Neper vereinzelt da, und er selbst hat sie nur aus Zweckmäßigkeitsgründen[1]) gewählt und hätte sie wahrscheinlich wieder aufgegeben, wenn es ihm vergönnt gewesen wäre, an seiner Schöpfung noch weiter fortzuarbeiten.

Was den Aufbau der geometrischen Reihe betrifft, den Neper in der Constructio beschreibt, so ist derselbe ziemlich kompliziert, indem sie aus 4 einzelnen Reihen zusammengesetzt wird. Zur Bildung der Reihe I wird $n = 10^7$ genommen, so daß der Quotient derselben $\frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{10^7} = 0{,}9999999$ ist. Die Wahl dieser Zahl gestattet aber, anstatt jedes Glied der Reihe durch Multiplikation mit 0,9999999 aus dem vorhergehenden herzuleiten, dies dadurch zu erreichen, daß man immer den zehnmillionsten Teil des vorhergehenden Gliedes von ihm abzieht. Hierdurch ergeben sich die Glieder der I. Reihe: $r_1 = 10000000$, $r_2 = r_1 - \frac{r_1}{10000000}$, u. s. w. $r_n = r_{n-1} - \frac{r_{n-1}}{10000000}$. Diese wird bis $n = 101$ fortgesetzt, wodurch $r_{101} = 9999900{,}0004950$[2]) kommt.

---

lated by W. R. Macdonald" 1889. 4°, ferner eine phototypische Reproduktion des Mirifici Canonis 1895 bei Hermann in Paris.

1) Cantor, II, 2, 731. — Bezüglich der von Neper gebrauchten mechanischen Anschauung siehe Matzka im Archiv der Mathematik XXXIV, 341 ff. — 2) Neper hat statt des Dezimalkommas einen Punkt, der sich auch bei Pitiscus findet, dem er ihn jedoch nicht entnommen hat. Cantor II, 2, 733.

Jetzt betrachtet er als erstes Glied seiner II. Reihe wieder 10^7, als zweites aber das letzte Glied r_{101} der ersten Reihe, das er auf 7 Stellen abkürzt. Somit ist der Quotient dieser II. geometrischen Reihe $\frac{9999900}{10000000} = 0{,}99999 = 1 - \frac{1}{10^5}$, mit welchem dieselbe bis zum 51. Gliede fortgesetzt wird, indem man stets den hunderttausendsten Teil des vorangehenden Gliedes von diesem abzieht. Es ist allgemein $r_m = r_{m-100} - \frac{r_{m-100}}{100000}$, und das letzte Glied wird $r_{5001} = 9995001{,}224804$. Statt dieses Wertes fand Neper infolge eines Rechenfehlers, auf den Biot in seiner vorzüglichen Besprechung von Nepers Methode aufmerksam machte[1]), die Zahl 9995001,222927, welche von dem wahren Werte in der 10. Stelle differiert, und da gerade diese Zahl für seine Logarithmen fundamental ist, so liegt hierin der Grund dafür, daß die Logarithmen Nepers in den letzten Stellen ungenau sind.

Wie zwischen dem ersten und zweiten Gliede der Reihe II die 99 Glieder der Reihe I liegen, so könnte man zwischen je zwei aufeinanderfolgende Glieder in II ebensolche 99 Glieder nach demselben Gesetze interpolieren, so daß die so vervollständigte Reihe 5001 Glieder umfassen würde. Dies thut jedoch Neper nicht, sondern er bedient sich nur des letzten Wertes, für den er näherungsweise 9995000 setzt, um eine dritte Reihe zu beginnen. Ihr erstes Glied ist wieder $r_1 = 10^7$, das zweite 9995000, und also der Reihenquotient $0{,}9995 = \frac{1999}{2000} = 1 - \frac{1}{2000}$. Damit erhält er die dritte Reihe, deren Gesetz durch $r_p = r_{p-1000} - \frac{r_{p-1000}}{2000}$ ausgesprochen ist, während das 21. Glied lautet $r_{100001} = 9900473{,}57808$. Nimmt man endlich statt dieser Zahl wieder näherungsweise 9900000 als zweites Glied einer IV. Reihe, deren erstes $r_1 = 10^7$ ist, so hat man den Quotienten $0{,}99 = 1 - \frac{1}{100}$ und bekommt als letztes 70. Glied $r_{6900001} = 4998609{,}4034$.

Dieses Schlußglied der Rechnung wird näherungsweise = 5000000, d. h. gleich dem halben Anfangsgliede aller vier Reihen gesetzt, und somit hätte man, wenn alle interpolierten Werte berechnet wären, eine geometrische Reihe von 6900001 Gliedern, deren Anfangsglied 10^7 und deren Quotient 0,9999999 ist; dieselbe kann also durch $10^7\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^n$ dargestellt werden.

Welche Logarithmen weist er nun aber diesen Zahlen, die als Sinus aufgefaßt werden, zu? Dieselben müssen natürlich mit den

1) Journal des Savants 1835, 363.

Stellenzeigern der einzelnen Glieder in direkter Beziehung stehen, wenn sie ihnen auch nicht gleich zu sein brauchen. Zu ihrer Bestimmung stellt er durch kinematische Betrachtungen zwei wichtige Sätze auf. Bezeichnet r irgend eine der Zahlen der Reihe, also einen Sinus, R den Sinus totus, so ist 1) $R - r < \log r < (R - r) \cdot \frac{R}{r}$ [1]), und also kann näherungsweise $\log r$ gleich dem arithmetischen Mittel zwischen diesen beiden Grenzen gesetzt werden. Bezeichnet ferner r' einen anderen Sinus, nahe an r, so ist 2) $\frac{r'-r}{r} \cdot R > \log r - \log r' > \frac{r'-r}{r'} \cdot R$ [2]). Also folgt

$$2) \qquad \log r - \log r' = \frac{1}{2}\frac{(r'-r)(r'+r)}{rr'}, \quad \text{oder} \quad = \frac{r'-r}{\sqrt{rr'}} \cdot R,$$

je nachdem man das arithmetische oder das geometrische Mittel nimmt.[3]) Den letzteren Wert kann man auch näherungsweise durch $\frac{r'-r}{r'+r} \cdot 2R$ ersetzen, indem man $\sqrt{rr'} = \frac{1}{2}(r + r')$ nimmt. Setzt man jetzt den Logarithmus von $R = 10^7$ gleich Null, so folgt aus dem ersten Theorem für den Logarithmus des zweiten Termes 1,00000005[4]). Um diese Zahl wachsen also die Logarithmen der sämtlichen in der I. Reihe enthaltenen 100 Sinus und können somit unmittelbar hingeschrieben werden. Der Logarithmus des letzten Gliedes ist dann: $\log r_{101} = 100{,}000005$. Um den Logarithmus des zweiten Gliedes der II. Reihe zu finden, benutzt Neper das 2. Theorem. Setzt man in demselben $r = 9999900$, $r' = 9999900{,}0004950$, $R = 10^7$, so erhält man bis auf 12 Stellen genau $\log r - \log r' = 0{,}000495004950$, also $\log r = 100{,}00050000$. Hieraus durch fortgesetzte Addition die Logarithmen der 50 Zahlen der II. Reihe. Nun wird wieder in derselben Weise wie oben der Logarithmus des zweiten Gliedes der III. Reihe abgeleitet und dafür 5001,2485387 gefunden. Da jedoch r_{5001}, wie schon bemerkt, fehlerhaft berechnet war, so ist auch sein Logarithmus unrichtig, der richtige Wert wäre 5001,25041645.[5]) Mit Hilfe dieses Logarithmus ergeben sich dann wieder durch Addition die Logarithmen aller Zahlen der III. Reihe, und in derselben Weise weiterschließend erhält man die konstante Differenz für die IV. Reihe und hiermit die Logarithmen der noch fehlenden Glieder.

---

1) Constructio p. 14. — 2) Constructio p. 19. Natürlich sind die beiden Sätze bei Neper in Worten gegeben. — 3) Vgl. hierüber Hutton a. a. O. p. XLVIII Anmerkung. Delambre hat in seiner Hist. de l'astronomie moderne I, Paris 1821, p. 499 durch Einführung der logarithmischen Reihe die Genauigkeit dieser Grenzen näher untersucht. — 4) Biot hat a. a. O. p. 361 gezeigt, daß dieses angenäherte Resultat bis auf $\frac{1}{3}$ der Einheit der 14. Dezimale mit dem wirklichen stimmt. — 5) Biot ebenda p. 363.

Die so vollendete Tafel nennt Neper „Radicalis tabula", da sie noch keineswegs die Tafel der gesuchten Logarithmen aller Sinus ist, sondern nur als die Wurzel derselben angesehen werden kann.

Um die letzteren aus ihr zu erhalten, bedient er sich zunächst wieder seines 2. Theorems und zwar in der Form $\log r - \log r' = \frac{r'-r}{r'+r} \cdot 2R$. Bedeutet hier r einen Sinus, dessen Logarithmus gefunden werden soll, so nimmt man den in der Radikaltafel ihm zunächstliegenden Wert r', dessen Logarithmus also bereits bekannt ist, und findet aus obiger Formel unmittelbar den gesuchten $\log r$. Auf diese Weise kann man die Logarithmen aller Sinus von Minute zu Minute bis $\sin 30^0 = \frac{1}{2} R = 5000000$ abwärts finden, der den Schluß der Radikaltafel bildet. Die Logarithmen der Sinus der noch übrigen Winkel werden dann hauptsächlich aus der längst bekannten Proportion $\sin 2\alpha : \sin \alpha = \cos \alpha : \frac{R}{2}$ bestimmt. Diese liefert ihm nämlich die durch die Formel $\log \sin \alpha = \left(\log \frac{R}{2} + \log \sin 2\alpha\right) - \log \cos \alpha$ ausdrückbare Regel[1]), mit welcher die Logarithmen der Sinus von Winkeln $< 30^0$ aus den bereits berechneten successive abgeleitet werden können.

Die auf diese Weise hergestellte erste logarithmisch-trigonometrische Tafel ist folgendermaßen eingerichtet. Sie besteht aus 7 Spalten. Jedem Grade gehören zwei nebeneinander aufliegende Seiten zu, die oben die Gradnummer, unten das Komplement zu 89^0 tragen. Jeder ersten Spalte links sind die Winkelminuten auf der einen Seite von $0'$ bis $30'$, auf der zweiten von $30'$ bis $60'$ abwärts laufend, in der 7. Spalte rechts die Minuten von $30'$ bis $60'$, bezüglich von $0'$ bis $30'$ aufwärts laufend angegeben, wodurch es ermöglicht wird, die Logarithmen der Sinus der Komplemente direkt abzulesen. Die 2. und 6. Spalte enthalten die Sinus selbst, die 3. und 5. Kolumne, über denen „Logarithmi" steht, deren Logarithmen. Die mittelste Spalte endlich, mit der Überschrift „Differentiae", enthält die Differenz zweier nebeneinander stehender Logarithmen, d. h. also die Logarithmen der Tangenten.[2]) Wir teilen eine kleine Probe der Tafel mit.

1) Constructio p. 31. — 2) Diese nennt er in seinen Sätzen kurz „Differentiale". Über ihrer Spalte sind die Zeichen + | — angegeben, da dieselben teils positiv (abundantes), teils negativ (defectivi) sein können.

Gr. 10. + | −

min.	Sinus.	Logarithmi.	Differentia.	Logarithmi.	Sinus.	
0	1736482	17507234	17354146	153088	9848078	60
1	1739347	17490751	17337150	153601	9847572	59
2	1742211	17474296	17320181	154115	9847066	58
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
						min.

Gr. 79.

So wenig wie Bürgi, legte Neper den Begriff einer Basis seinem Logarithmensystem zugrunde, obwohl er auf p. 28 seiner Constructio sagt, „daß die Logarithmen aller in zehnfachem Verhältnis stehenden Sinus eine konstante Differenz haben“[1]) und für diese Differenz die Zahl 23025842,34 angibt.

Dividiert man Numeri und Logarithmen mit 10^7, so gibt Nepers Tafel für $\log^N \frac{1}{2} = \log^N \sin 30^0 = 0{,}6931469$; da aber andererseits $\log^e 2 \equiv 0{,}6931472$ ist, so folgt für die Basis N näherungsweise der Wert $\frac{1}{e}$.[2])

In dem Appendix, welcher der Constructio beigegeben ist, bespricht Neper verschiedene Verbesserungen in den Methoden zur Berechnung seiner Tafel und sagt, es wäre am besten, den Logarithmus der Zahl 1 gleich Null zu setzen und die Zahl, deren Logarithmus 1 mit beliebigen Nullen ist, entweder gleich 10 oder $\frac{1}{10}$ zu nehmen. Hier ist also zum erstenmal ausdrücklich die Rede von einer Basis des Systems. Jedoch konnte er diesen Gedanken nicht weiter mehr verfolgen, da er bereits am 4. April 1617 starb. Sein Freund Henry Briggs (1556—1630), der sich schon gleich nach dem Erscheinen der „Descriptio“ für das „wundervolle“ Buch begeistert hatte und mit Neper in direkten Verkehr getreten war, übernahm die Ausführung dieser Idee und erstellte die ersten nach

1) Constructio p. 28 heißt es: „Omnes sinus in proportione decupla habent 23025842.34 pro differentia suorum arteficialium. Vgl. hierüber P. Tannery, Bulletin de Darbono 1896. Serie 2, XX, 83. — 2) Kewitsch, Zeitschr. für math. und naturw. Unterricht XXVII, 1896, 321—333 und in anderer Weise bei Biot a. a. O. p. 366, bei Wackerbarth, Les mondes XXVI, 26, und Monthly Notices of the R. S. XXXI, 1871, 263, bei J. W. L. Glaisher in Report of the Committee of mathematical Tables. 71—72 aus Report of British Association 1873. Vgl. auch S. Günther, Vermischte Untersuchungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften. Leipzig 1876.

ihm benannten Logarithmen mit der Basis 10.[1]) Da uns jedoch hier die Geschichte der Logarithmen nur insoweit interessiert, als sie den Bedürfnissen der Trigonometrie entsprangen oder zur Ausführung trigonometrischer Rechnungen dienten, werden wir von hier ab ihre Entwickelungsgeschichte nur nach dieser einen Richtung verfolgen, müssen aber zuerst noch sehen, wie Neper seine neue Erfindung für die Trigonometrie fruchtbringend verwertete.

§ 2. Nepers Verdienste um die Trigonometrie.

Neper hatte seine Logarithmen erfunden, um die schwerfälligen trigonometrischen Rechnungen zu vereinfachen; wie eine solche Vereinfachung mit Hilfe der neuen Zahlen möglich sei, das zu zeigen war die zweite Aufgabe, die er sich in seiner „Descriptio" gestellt hatte und mit dem ihm eigenen erfinderischen Geschicke löste.

Zunächst behandelte er die ebene Trigonometrie, indem er die bekannten Sätze für das rechtwinklige Dreieck in Gestalt logarithmischer Gleichungen angab. War z. B. eine Kathete (Schenkel) desselben aus dem Gegenwinkel und der anderen Kathete zu berechnen, so gab er den Satz an: „Der Logarithmus irgend eines Schenkels ist gleich dem Aggregat aus dem Differentiale des Gegenwinkels und dem Logarithmus des anderen Schenkels", d. h. also für ein bei C rechtwinkliges Dreieck $ABC: \log a = \log \operatorname{tg} \alpha + \log b$. Während also bisher die betreffenden Analogieen stets in Form einer Proportion aufgestellt worden waren, zwingt ihn seine Methode zur Einführung der eigentlichen Gleichungsform, die hier zum erstenmal in der Trigonometrie zur Anwendung kommt.

Die Behandlung der schiefwinkligen Dreiecke vollzieht er teils durch Zerlegung in rechtwinklige, teils durch Umsetzung der bekannten Sätze in logarithmische Form. So schreibt er statt der Tangentenproportion Finks: den durch $\log(a-b) + \log \operatorname{tg} \frac{\alpha+\beta}{2} - \log(a+b) = \log \operatorname{tg} \frac{\alpha-\beta}{2}$ ausgedrückten Satz.[2]) Bemerkenswert ist auch seine Behandlung des Cosinussatzes. Indem er nämlich die Differenz oder Summe der Abschnitte, welche die Höhe des Dreiecks

1) Logarithmorum chilias prima 1617 und Arithmetica Logarithmica 1624, welche 14stellige Logarithmen der Zahlen von 1 bis 20 000 und von 90 000 bis 100 000 enthielt. — In der Trigonometria Britannica p. 52 gibt Briggs selbst an, daß er von Neper zur Berechnung der Zahlenlogarithmen aufgefordert wurde. — 2) A. a. O. Prop. 5, 25—26.

auf der Basis macht, je nachdem sie innerhalb oder außerhalb desselben fällt, als „basis alterna“ (a_1) (Fig. 2) bezeichnet, gibt er die Gleichung an $\log (b + c) + \log (b - c) = \log a + \log a_1$. Hieraus folgert er die „basis alterna“ selbst und mit ihrer Hilfe und der bekannten Basis die Abschnitte, worauf eine logarithmische Behandlung der rechtwinkligen Dreiecke ABD und ACD etwa die Winkel liefert. Wie die prosthaphäretische Methode die Darstellung trigonometrischer Analogieen in Form von Summen und Differenzen forderte, so zwang die Einführung der Logarithmen sofort zur Begünstigung der Produktform, die von da ab in dem Aufbau trigonometrischer Sätze stets angestrebt wurde. Dieser Umstand veranlaßte schon Neper und nach ihm andere zur Auffindung neuer Relationen, wie wir weiter unten sehen werden.

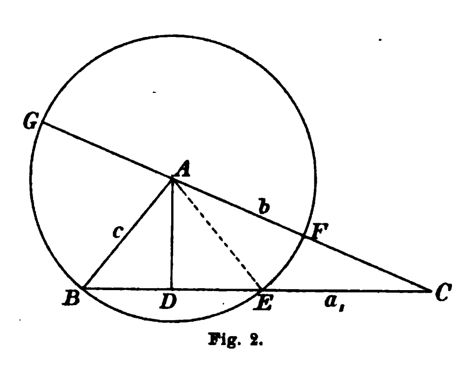


Fig. 2.

Die sphärische Trigonometrie hat Neper vollständig reorganisiert. Zunächst entwickelte er seine Theorie der zirkulären Stücke[1]), auf welche er, wie schon De Morgan und Cantor vermuteten, durch die Lektüre von Torporleys Werk verfallen war.[2]) Indem er nämlich Dreiecke, die einen Winkel oder eine Seite von 90° besitzen, nicht weiter unterschied, da er die Möglichkeit das eine in das andere umzusetzen aus Pitiscus' Trigonometrie[3]) kannte, ersetzte er jene drei Stücke, welche dem rechtwinkeligen Element nicht anliegen, durch ihre Komplemente, ordnete alle 5, ihre Aufeinanderfolge beibehaltend „zyklisch“ oder in „pentagonaler“ Weise an und nannte sie „zirkulär“ (partes circulares). Mit ihrer Hilfe gewinnt man, wie Neper sagt, ein Mittel, um Dreiecke, deren wirkliche Stücke ganz verschieden sind, einheitlich zu behandeln, da die zirkulären Stücke dieselben sein können, ohne daß es die wirklichen sind. „Dies folgt auf das deutlichste“ aus der Betrachtung des sphärischen Fünfecks $PSOQZ$ (Fig. 3)[4]), in dem die Winkel, welche die bis zum Schnitt verlängerten Seiten bilden, rechte sind, während die Bögen SC, BZ,

1) Cap. IV. lib. II, 30—34 incl. — 2) Vgl. S. 186 in unserem ersten Tl. — 3) Er bemerkt p. 23—24 ausdrücklich, daß Adr. Metius und Pitiscus diesen Satz schon kennen. — 4) Dieselbe Figur hat später Gauß einer eingehenden Betrachtung unterzogen. Er nennt sie Pentagramma mirificum (Werke III. und VIII).

CQ u. s. w. Quadranten darstellen. Die zirkulären Stücke der 5 Dreiecke BSP, PCZ, ZDQ, QEO, OFS sind sämtlich dieselben. So hat z. B. $\triangle BSP$ die 5 zirkulären Stücke BP, $90^0 - \sphericalangle P$, $90^0 - PS$, $90^0 - \sphericalangle S$, BS; Dreieck CPZ aber $CP = 90^0 - PS$, $CZ = BS$, $90^0 - \sphericalangle P$, $90^0 - \sphericalangle Z = 90^0 - \sphericalangle S$, $90^0 - PZ = PB$. Die Polarfigur zur vorigen, die durch die punktierten Kreise angedeutet ist, in welchen die Bögen $PQ = QS = SZ = ZO = OP = 90^0$ sind, beleuchtet das Entsprechende für die 5 Quadrantendreiecke ZPQ, QZO, OQS, SOP, PSZ. — Von den 5 zirkulären Stücken kommen in jedem Falle drei in Betracht, von denen zwei gegeben sind und eins gesucht wird, und zwar ist ein Stück stets ein inneres (pars intermedia) und zwei sind äußere (partes extremae), welche entweder das innere umgeben (vicinae aut circumscriptae) oder ihm gegenüberliegen (remotae aut oppositae). Für sie gilt die Regel: „Der Logarithmus des inneren Stückes ist gleich den Differentialen der anliegenden äußeren oder den Antilogarithmen der gegenüberliegenden äußeren Stücke.“[1]) Man beachte, daß bei Neper Logarithmus immer gleich bedeutend mit log sin, Differentialis äquivalent mit log tg und Antilogarithmus gleich log cos ist.

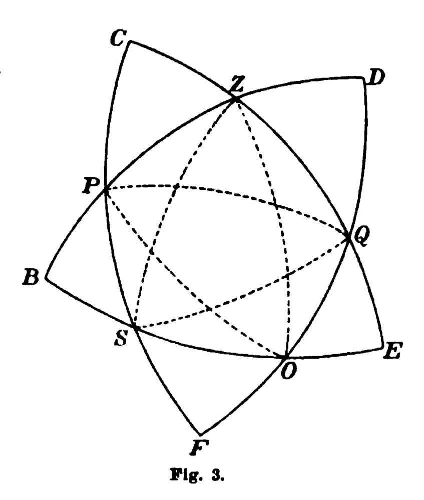


Fig. 3.

Zum Zwecke des Beweises, den er für seinen Satz gibt, vereinigt er die sämtlichen Triplizitäten — hier das von Torporley herübergenommene Wort — in zwei Proportionen[2]), die er in folgender Weise ausspricht: „Die Tangente irgend eines äußeren Stückes verhält sich zum Sinus des inneren, wie der Sinus totus zur Tangente des anderen äußeren Stückes“, und: „der Sinus des Komplementes eines äußeren Stückes verhält sich zum Sinus des inneren, wie der Sinus totus zum Sinus des Komplementes des anderen äußeren Stückes“. Dieses ist der genaue Wortlaut jener Regel, die noch heute den

1) „Logarithmus intermediae aequatur differentialibus circumscriptarum extremarum, seu antilogarithmis oppositarum extremarum“ a. a. O. p. 33. — 2) A. a. O. p. 34. Die beiden Regeln sind nichts anderes als die Tangentenformel von Abû'l Wafâ und die Regel der vier Größen angewendet auf die obigen 5 Dreiecke, wodurch die 10 Sätze für das rechtwinklige Dreieck sich sofort ergeben.

Namen Nepers führt. Wohl hat sich die Ausdrucksweise im Laufe der Zeit etwas verändert, indem man einmal von der Proportionsform abging und dann nur die Komplemente der Katheten einführte, aber hierin liegt kein besonderer Fortschritt.

Wenn Neper auch, worüber wir nicht zweifeln, Torporleys Schrift kannte, so gebührt ihm doch das Verdienst, die Doppelregel zum erstenmal klar formuliert und durch die einzige so einfache Gleichung zwischen den Logarithmen der trigonometrischen Funktionen dargestellt zu haben. Durch diese Formulierung waren mit einem Schlage die sämtlichen Sätze über das rechtwinklige sphärische Dreieck, die in ihrer Gesamtheit seit Vieta im Abendlande im Gebrauch waren und in den verschiedensten Gestalten zur Anwendung kamen, in einen einzigen Satz vereinigt, den das Gedächtnis leicht festzuhalten vermochte. Neper war sich auch der Tragweite seiner Regel sehr wohl bewußt, indem er sagte: „. . . es genügt hier, daran zu erinnern, daß durch diese wenigen zirkulären Stücke und ihre einzige Regel jede Konfusion der wirklichen Stücke und ihrer Regeln vermieden und behoben werde“.

Bei den schiefwinkligen sphärischen Dreiecken unterscheidet er zwei Gruppen von Aufgaben, diejenigen „bei welchen die Winkel und Seiten gemischt vorkommen, und jene, bei welchen nur gleichartige Stücke, Seiten oder Winkel auftreten. Die erste Gruppe wird teils mit Zerlegung in rechtwinklige Dreiecke, teils mit dem Sinussatze behandelt, der natürlich wieder in der Form einer Gleichung zwischen den Logarithmen gegeben wird, die zweite Gruppe aber hat Neper zu wesentlich neuen Formeln geführt, da die bekannten für logarithmische Rechnung nicht geeignet waren. Der erste Satz, der dazu dient, einen Winkel aus den drei Seiten zu berechnen, wird in einem Wortlaut gegeben, den wir durch die Gleichung[1])

$$\log\sin\frac{b+a-c}{2}+\log\sin\frac{b-(a-c)}{2}-\{\log\sin c+\log\sin a\}=2\log\sin\frac{\beta}{2},$$

darstellen können. Diese ist aber aus der Logarithmierung der uns sehr wohl bekannten Gleichung

$$\sin\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{\sin\frac{b+a-c}{2}\cdot\sin\frac{b-a+c}{2}}{\sin c\sin a}}$$

gewonnen, die hier zum erstenmal auftritt, und zwar offenbar deshalb zum erstenmal, weil sie erst infolge der Logarithmen notwendig

1) Descriptio p. 47.

wurde. Man wird fragen, wie Neper zu ihr gelangte; dazu waren aber alle Mittel bereits vorbereitet. Er geht aus von Regiomontans Form des Cosinussatzes:[1])

$$(\sin a \ \sin c) : R^2 = \text{sinvers}\, b - \text{sinvers}\, (a - c) : \text{sinvers}\, \beta.$$

Nun wußte man längst, daß $\text{sinvers}\, \beta = 2 \sin^2 \frac{\beta}{2}$ und ebenso, daß $\text{sinvers}\, b - \text{sinvers}\, (a - c) = \cos (a - c) - \cos b$ ist, und die Gleichheit der letzten Differenz mit $2 \sin \frac{b + c - a}{2} \sin \frac{b - (a - c)}{2}$ begegnete uns in der prosthaphäretischen Methode, also folgte unmittelbar die obige Gleichung in Form einer Proportion; in der That skizziert auch Neper seinen Beweisgang in dieser Weise.[2]) In gleicher Art gibt er in einem zweiten Satze die Formel für $2 \log \cos \frac{\beta}{2}$ an.

Als dritten Satz[3]) leitet er folgenden ebenfalls völlig neuen ab: „Zieht man von der Summe der Differentiale des halben Aggregates und der halben Differenz der beiden Schenkel das Differentiale der halben Basis ab, so erhält man das Differentiale der halben Basis alterna"; d. h.

$$\log \operatorname{tg} \frac{c + a}{2} + \log \operatorname{tg} \frac{c - a}{2} - \log \operatorname{tg} \frac{b}{2} = \log \operatorname{tg} \frac{b_1}{2},$$

wo $b_1 = \text{arc}\, AD - \text{arc}\, DC$ in Fig. 4 ist. Um diesen Satz zu be-

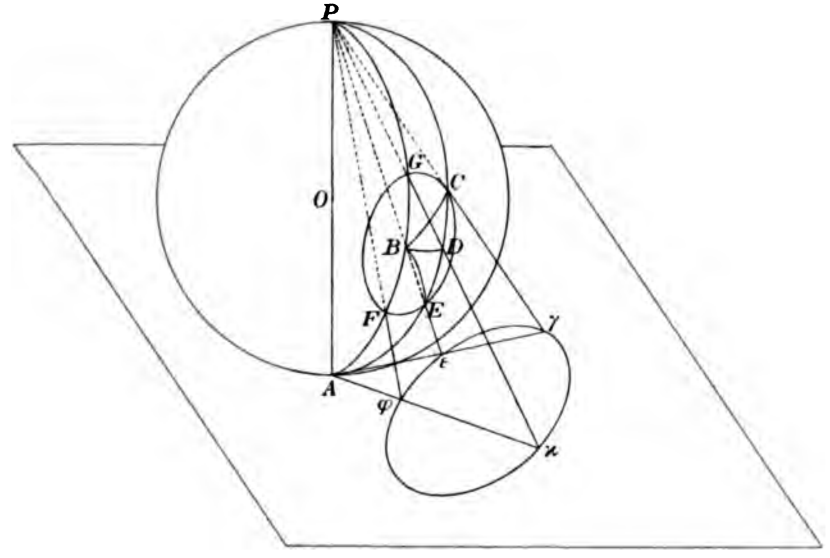


Fig. 4.

1) A. a. O. p. 48. — 2) Eine direkte Ableitung aus der Figur mittelst der Projektionsmethode hat Gellibrand gegeben: Geometria Britannica. 1633 p. 82. — 3) A. a. O. p. 49. Prop. 6.

weisen, gewinnt er in sehr origineller Weise mittelst der stereographischen Projektion die Proportion: $\operatorname{tg}\frac{b}{2} : \operatorname{tg}\frac{c+a}{2} = \operatorname{tg}\frac{c-a}{2} : \operatorname{tg}\frac{b_1}{2}$, indem er (Fig. 4) in A die Tangentialebene an die Kugel legt, den Durchmesser AOP zieht und P als Augpunkt auffaßt. Beschreibt man dann mit arc BC als Radius den Kugelkreis $CEFG$, so projiziert sich dieser in der Tangentialebene als Kreis $\gamma\varepsilon\varphi\varkappa$, und die Projektionen φ und $\varkappa$ seiner Punkte F und G liegen mit A auf einer Geraden, da letztere dem Meridian $PGFA$ angehören. Das Gleiche gilt von den Punkten ε und γ, die die Projektionen von E und C sind. Faßt man PA als Sinus totus auf und setzt ihn $= 1$ so ist jetzt:

$$A\varphi = \operatorname{tg} AP\varphi = \operatorname{tg}\frac{AOF}{2} = \operatorname{tg}\frac{AF}{2} = \operatorname{tg}\frac{c-a}{2},$$

$$A\varkappa = \operatorname{tg} AP\varkappa = \operatorname{tg}\frac{AOG}{2} = \operatorname{tg}\frac{AG}{2} = \operatorname{tg}\frac{c+a}{2},$$

$$A\varepsilon = \operatorname{tg} AP\varepsilon = \operatorname{tg}\frac{AOE}{2} = \operatorname{tg}\frac{AE}{2} = \operatorname{tg}\frac{b_1}{2},$$

$$A\gamma = \operatorname{tg} AP\gamma = \operatorname{tg}\frac{AOC}{2} = \operatorname{tg}\frac{AC}{2} = \operatorname{tg}\frac{b}{2},$$

und hiermit folgt aus einem bekannten geometrischen Satz über die Sekanten eines Kreises sofort die behauptete Analogie, die durch Logarithmieren in obigen Satz übergeht.

Auch diese neue Gleichung benutzt Neper zur Bestimmung eines Winkels aus den drei Seiten, indem er aus ihr $b_1 = AD - CD$ berechnet, dann mit Hilfe von $AD + DC = b$ die Bögen AD und CD bestimmt und endlich mit seiner Regel aus den rechtwinkeligen Dreiecken ADB und BDC die Winkel α und γ folgert. Zur Lösung der polaren Aufgabe gibt er nur an, wie man Winkel und Seiten des sphärischen Dreiecks mit dem bekannten Satze über das Nebendreieck des Supplementardreiecks bestimmen kann.

Die eben mitgeteilte Prop. 6 ist, wie man sieht, keineswegs eine der sogenannten Neperschen Analogieen, und es ist unrichtig, wenn Baltzer[1]) und nach ihm andere bezüglich derselben auf diese Stelle verweisen; überhaupt findet sich in der „Descriptio“ Nepers von diesen Analogieen keine Spur, dieselben sind vielmehr in der „Constructio“ p. 56 unter der Überschrift „Propositiones quaedam eminentissimae ad triangula sphaerica, mira facilitate resolvenda“ angegeben und zwar in folgender Weise. Man hat die Aufgabe, aus einer Seite b und den zwei anliegenden Winkeln α und γ die beiden

1) Elemente der Mathematik. II. 5. Aufl. 1878, 322.

Schenkel a und c zu bestimmen. Die Regel, die Neper hierfür gibt, drückt sich in unserer Zeichensprache folgendermaßen aus:

$$1)\quad \log\sin\frac{\gamma+\alpha}{2} + \log\sin(\gamma-\alpha) + \log\operatorname{tg}\frac{b}{2} - \log\sin(\gamma+\alpha) - \log\sin\frac{\gamma-\alpha}{2} = \log\operatorname{tg}x \text{ (primum inventum).}$$

$$2)\quad \log\sin\frac{\gamma-\alpha}{2} + \log\operatorname{tg}\frac{b}{2} - \log\sin\frac{\gamma+\alpha}{2} = \log\operatorname{tg}y \text{ (secundum inventum),}$$

$x + y = c,\ x - y = a$. Also sind die trigonometrischen Formeln, aus denen diese beiden Gleichungen entstehen,

$$\operatorname{tg}x = \operatorname{tg}\frac{c+a}{2} = \frac{\sin\frac{\gamma+\alpha}{2}\sin(\gamma-\alpha)}{\sin(\gamma+\alpha)\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}}\cdot\operatorname{tg}\frac{b}{2},$$

$$\operatorname{tg}y = \operatorname{tg}\frac{c-a}{2} = \frac{\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{b}{2}}{\sin\frac{\gamma+\alpha}{2}},$$

die erste gibt vereinfacht:[1])

$$\operatorname{tg}\frac{c+a}{2} = \frac{\cos\frac{\gamma-\alpha}{2}}{\cos\frac{\gamma+\alpha}{2}}\operatorname{tg}\frac{b}{2},$$

und somit sind dies die beiden ersten Neperschen Analogieen. Dieselben werden im Folgenden in noch etwas anderer, aber nicht einfacherer Gestalt gebracht, eine Ableitung ist nicht angegeben. Die Polarformeln zu ihnen aber finden sich bei Neper überhaupt nicht, sondern dieselben gab Briggs in seinen Adnotationes zur Constructio p. 61, was ausdrücklich hervorgehoben werden muß, da man Neper bisher gewöhnlich alle vier Formeln zuerkannt hat.[2])

Überblicken wir Nepers Leistungen im Gebiete der Trigonometrie, so müssen wir zugestehen, daß durch seine Erfindung der Logarithmen diese Wissenschaft in ganz neue Bahnen geleitet wurde, und daß von ihm selbst schon die Richtung angegeben worden ist, nach welcher die Umgestaltung der bisher im Gebrauche befindlichen Sätze stattzufinden hatte, um das neue Instrument in fruchtbringender Weise zu verwerten. Aber auch sein zweites Verdienst ist nicht gering anzuschlagen, daß es ihm zum erstenmal geglückt ist, die

1) Diese Vereinfachung gibt Neper jedoch merkwürdigerweise nicht an; erst Briggs teilt sie in seinen Adnotationes zur Constructio p. 61 mit. — 2) Delambre hat in seiner Histoire de l'Astronomie moderne, Paris 1821, I, 506 schon auf die Unrichtigkeit dieser Angabe aufmerksam gemacht.

verwirrende Fülle der Sätze, die bisher zur Behandlung der rechtwinkligen Kugeldreiecke dienten, durch eine einzige klar und kurz gefaßte Regel zu ersetzen.

Vor Nepers Auftreten hatten wir nur wenige Persönlichkeiten in England zu nennen, die irgendwelche nennenswerte Leistungen aufweisen konnten. In Schottland aber standen die mathematischen und astronomischen Wissenschaften auf dem tiefsten Niveau, so daß man wohl von diesem Lande zuletzt in Europa den Ausgang einer so wichtigen Erfindung, wie die der Logarithmen, erwartet hätte. Von da ab aber spielt auch England eine nicht unbedeutende Rolle in der Geschichte der Trigonometrie.

§ 3. Die Verbreitung der Neperschen Erfindung und ihr Einfluß auf die Verbesserung trigonometrischer Rechnungen.

Fast noch rascher als in England fand Nepers Erfindung der Logarithmen trigonometrischer Funktionen auf dem Kontinente und namentlich in Deutschland Eingang und Verbreitung. Denn wenn auch Eduard Wright, der sich in der Schiffahrtskunde und in der Kartenprojektionslehre einen Namen gemacht hatte, schon gleich nach dem Erscheinen der Descriptio mit Enthusiasmus für die großartige Erfindung eine Übersetzung des Schriftchens ins Englische unternahm, um es auch außerhalb der Gelehrtenkreise bekannt zu machen, so wurde doch Nepers Originalwerk ziemlich rasch durch Briggs' schon erwähnte Tafel der Logarithmen der natürlichen Zahlen und dessen spätere Arbeiten, auf die wir noch zurückkommen werden, verdrängt.

In Deutschland aber, wo der große Kepler bei seinen vielfachen astronomischen Arbeiten und Rechnungen in stetem Kampfe mit den schwerfälligen Methoden der trigonometrischen Berechnungen lag, machte sich das Bedürfnis nach einem abkürzenden Verfahren am meisten fühlbar. Mit Kepler eng befreundet war Benjamin Ursinus[1]) (Behr), der ihn auch bei seiner aufreibenden Beschäftigung thatkräftig unterstützte und so die Schwierigkeiten der Rechnung genügend kennen lernte. Als er daher von einem Theologen namens Vechner Nepers Schrift erhielt, erkannte er sofort ihre Wichtigkeit und beeilte sich, sie durch eine Neubearbeitung in Deutschland bekannt zu machen; auch Kepler wies er sofort auf sie hin. Schon 1618, also 4 Jahre nach dem Erscheinen der Descriptio, kam sein „Cursus mathematici practici Volumen primum, continens Illustr. et Generosi *D N.* Johannis

1) Ursinus war 1587 zu Sprottau geboren und lebte eine Zeit lang als Hofmeister in Prag, wo er Kepler kennen lernte. Er starb als Professor der Mathematik zu Frankfurt a. d. O. 1634 oder 33.

Neperi etc. Trigonometriam Logarithmicam usibus discentium accommodatam." Coloniae in 8°[1]) heraus und gab, um ein kleines Format zu erzielen, Nepers Kanon in der Weise verkürzt, daß die Sinus und ihre Logarithmen zwei Stellen weniger enthielten. Zur Bestimmung der Winkelsekunden war eine selbständig berechnete Proportionaltafel beigegeben, sonst schloß sich die Schrift ganz an das Original an und war nur für die Studenten verfaßt, denen Ursinus nach seiner eigenen Aussage, sobald er Kenntnis von der neuen Erfindung genommen hatte, darin Unterricht erteilte. Er hat also jedenfalls das Verdienst, zuerst weitere Kreise auf die wichtige Entdeckung aufmerksam gemacht zu haben.

Aber es kommt ihm auch noch ein anderes Verdienst zu, das wir, obwohl es einer etwas späteren Zeit angehört, gleich hier erwähnen wollen. Er hat nämlich im Jahre 1624 einen großen Kanon Neperscher Logarithmen auf 8 Dezimalen herausgegeben, bei welchem die Winkel von 10 zu 10 Sekunden fortschreiten. Dieses Werk, welches die ersten 8-stelligen Tafeln enthält, führt den Titel „Benjamini Ursini Sprotavi . . . Magnus Canon logarithmicus." Coloniae 1624 in 4° und findet sich gewöhnlich einer im nächstfolgenden Jahre erschienenen „Trigonometria" in drei Büchern angehängt. Der große Kanon ist nach Nepers Vorschriften vom Fundament aus neu berechnet, indem namentlich genauere Sinuswerte zugrunde gelegt sind[2]) und bei Bildung der einzelnen Reihen eine größere Gliederzahl interpoliert wird.

Übrigens stieß auch die neue Erfindung, wie es immer geht, auf Gegner. Namentlich wollte dem an die starren Formen der Euklidschen Geometrie gewohnten Geiste der meisten deutschen Mathematiker das mechanische Fundament nicht behagen, auf dem Neper seinen ganzen Kalkül aufgebaut hatte. Besonders Keplers alter, hochverdienter Lehrer Maestlin in Tübingen konnte sich nicht mit der Neuerung derselben befreunden, obwohl ihn Kepler auf jede Weise von dem Nutzen derselben zu überzeugen suchte.[3])

1) Köln a. d. Spree, siehe Cantor II, 2, 739. — Das uns vorliegende Exemplar der Münchner Hof- und Staatsbibliothek trägt die Jahrzahl 1618, nicht 17 oder 19, wie anderwärts angegeben wird. Die Vorrede ist von 1617 datiert. — 2) Auch hat Ursinus bereits den später von Biot wieder erkannten Fehler (S. 7) bemerkt und statt 23025842.34 die auf 8 Stellen richtige Zahl 23025810 angegeben. — Über die dem Kanon vorausgeschickte Trigonometrie ist nur zu erwähnen, daß Ursin auch Briggs' Bemerkungen und Ergänzungen miteinbezog, indem er (p. 259—260) die beiden Neperschen Analogieen für die Seiten in der reduzierten Form anführte. Aber auch er blieb, wie Neper und Briggs, die Beweise für diese Formeln schuldig. — 3) Vgl. hierüber Kepleri Opera omnia. Ed. Frisch t. VII, 299.

Kepler, der wie wir hörten durch Ursinus die erste Nachricht von den Logarithmen erhalten und sich durch die kleine Schrift des letzteren näher orientiert hatte, bekam im Juli 1619 ein Exemplar von Nepers Werk und erkannte durch ein eingehendes Studium desselben sofort, welche enorme Unterstützung ihm die neuen Tafeln bei seinen astronomischen Berechnungen bieten konnten. Er benutzte daher die Gelegenheit in seinen Ephemeriden für das Jahr 1620 ein offenes Schreiben an Neper ergehen zu lassen, von dessen inzwischen erfolgtem Tode er keine Kenntnis hatte, erkannte hierin das hohe Verdienst desselben in begeisterten Worten an[1]) und trug so durch das Gewicht seiner Persönlichkeit zur Ausbreitung des neuen Rechnungsverfahrens wesentlich bei.

Bei einem Manne von Keplers[2]) Größe und Bedeutung ist es selbstverständlich, daß er mit den von seinen Vorgängern und Zeitgenossen geschaffenen Hilfsmitteln seiner Wissenschaft bis ins Kleinste vertraut war, und so sehen wir ihn denn auch im Besitze aller zu seiner Zeit im Gebrauche befindlichen trigonometrischen Methoden, die er mit der ihm eigenen Gewandtheit handhabte. Namentlich bediente er sich sehr häufig der Prosthaphäresis[3]), die ihm teils aus dem Lehrbuch des Pitiscus, teils aus seinem persönlichen Umgang mit Jobst Bürgi bekannt sein mochte; auch war ihm sicher Jöstels Traktat nicht entgangen. Als er aber Nepers Erfindung kennen gelernt hatte, durchschaute er sofort ihre Vorzüge vor dem älteren Verfahren und warf sich mit jener idealen Begeisterung, die er während seines ganzen Lebens für die Förderung der Wissenschaft trug, auf die Verbesserung der neuen Methode. Wir erwähnten schon, daß den deutschen Mathematikern die Basis, auf welcher der geniale Schotte sein Gebäude errichtet hatte, nicht genügend gefestet schien, und daß sie daher der Richtigkeit seiner Zahlen immer noch Zweifel entgegen brachten. Deshalb richtete Kepler sein Augenmerk hauptsächlich auf eine gründliche Fundierung der neuen Lehre, und dies gelang ihm

1) Opera t. VII, 520—522. — 2) Johann Kepler lebte von 1571—1630. Bezüglich seines Lebens verweisen wir auf die treffliche Biographie von S. Günther, Berlin 1896, die als 22. Band der „Geisteshelden" von A. Bettelheim erschien; von seinen Werken erwähnen wir hier nur sein „Epitome Astronomiae Copernicanae", dessen vier erste Bücher 1618—1621 erschienen, seine „Chilias Logarithmorum", Marpurgi 1624, und die Rudolfinischen Tafeln. — 3) So z. B. im Epitome (Opera Kepleri Edit. Frisch VI). Übrigens entgingen ihm die Schattenseiten dieser Methode keineswegs, wie aus einem Briefe an Herwarth von Hohenburg vom 18. Okt. 1608 (Opera IV, 527) zu ersehen ist. Bezüglich der Sätze, deren sich Kepler mit Vorliebe zur Berechnung sphärischer Dreiecke bedient (der Regel der vier Größen, des Sinussatzes und der Tangentenregel des Abû'l Wafâ), siehe den Brief an Crüger, Opera VI, 47.

auch in der im Winter 1621 auf 22 ausgearbeiteten „Chilias logarithmorum ad totidem Numeros Rotundos; praemissa Demonstratione legitima Ortus Logarithmorum, eorumque Usus etc.".

Um nicht zu weitläufig zu werden, müssen wir uns mit folgenden Bemerkungen begnügen. Kepler läßt im Gegensatze zu Neper Zahlen, deren Logarithmen er sucht, nach ganzen Einheiten von 1 bis 1000 fortschreiten; da er dieselben aber als Sinus für den Sinus totus 10^7 auffaßt, so fügt er jeder Zahl noch 4 Nullen hinzu.[1]) Diese Zahlen stehen in der zweiten Spalte seiner Tafel, während in der ersten die ihnen entsprechenden Bögen auf Grade, Minuten und Sekunden berechnet, angegeben sind. Die letzteren wachsen also nicht wie bei Neper um die gleiche Differenz. Außerdem enthält die 3. Kolumne die nämlichen Zahlen in 24 Teilen des Radius und deren Minuten und Sekunden und die 5. Spalte dieselben in 60 Teilen des Radius und deren Minuten ausgedrückt, die 4. aber umfaßt die Logarithmen der Sinus. Dieselben berechnet er nicht wie Neper durch fortgesetzte Subtraktion gleicher Brüche, sondern durch Einschalten mittlerer geometrischer Proportionalen oder fortgesetztes Quadratwurzelziehen, wie jener schon in seinem Anhange zur Constructio vorgeschlagen hatte, die übrigens Kepler nicht bekannt war.

Bezeichnet man den Keplerschen Logarithmus einer Zahl a mit $\log^K a$, so sind die beiden Progressionen, die er zugrunde legte, durch die allgemeinen Glieder

$$\log^K a = nd \qquad \text{und} \qquad a = 10\,(1-d)^n$$

gegeben.[2]) Aus der zweiten Gleichung ergibt sich für $d = 1 - \sqrt[n]{\frac{a}{10}}$, und Kepler gelangte zu dem Werte von d, der nahe gleich Null sein mußte, damit er seine nach ganzen Intervallen fortschreitenden Zahlen mit den Gliedern der Reihe $a = 10\,(1-d)^n$ identifizieren konnte, indem er n gleich einer hohen Potenz von 2 setzte. Wollte er z. B. log 7, oder wie er schreibt, den Logarithmus der Zahl 70000.00 berechnen, so setzte er[3]) $n = 2^{30}$, indem er zwischen 7 und 10 dreißig mittlere Proportionalen einschaltete. Hierdurch ergab sich

$$d = \sqrt[2^{30}]{0{,}7} = 0{,}00000000033217943100,$$

und somit $\log^K 7 = 2^{30} \cdot d = 0{,}35667494813722214400$. In seiner Tafel steht daher neben 70000.00 der Logarithmus 35667.49, und die ganze entsprechende Zeile heißt daselbst[4]):

1) Übrigens gibt er am Beginne seiner Tafel noch die Logarithmen der Einer, der Zehner, der Hunderter und der Tausender an. — 2) R. Wolf, H. A. I, 75. — 3) Opera VII, p. 323. Demonstratio structurae logarithmorum. — 4) Opera VII, 403. Ebenda 347 gibt er an, daß er der letzten Ziffer in seinen

Arcus circuli	Sinus seu numeri absoluti	Partes vicesimae quartae	Logarithmi	Partes sexagesimae
44° 25′ 37″	70000.00	16° 48′ 0″	35667.49	42.0

Keplers Logarithmen sind also eigentlich, wie die Briggsschen, Zahlenlogarithmen und können erst in zweiter Linie als trigonometrische aufgefaßt werden.

Man wird sich erinnern, daß Bürgi seine Progreßtabul im Jahre 1620 veröffentlicht hatte, also um dieselbe Zeit, als Kepler bereits mit dem Gedanken umging, selbst eine Logarithmentafel zu schaffen. Es liegt daher die Frage nahe, warum er sich selbst dieser äußerst mühevollen Arbeit unterzog, statt die bereits vorhandene Tafel seines Freundes zu benützen. Uns scheint der Grund hierfür hauptsächlich darin zu liegen, daß Bürgis Antilogarithmentafel für Keplers Zwecke nicht die gewünschte Verwendbarkeit hatte. Außerdem war die Tafel dadurch, daß Bürgi es unterlassen hatte, eine Gebrauchsanweisung mitzugeben, von vorneherein für jene Mathematiker, die ihm nicht wie Kepler nahestanden, unbrauchbar, und der letztere wollte daher ein Werk schaffen, das nicht nur ihm allein, sondern der ganzen Mitwelt Nutzen bringen sollte. Deshalb gab er auch „um etwaige Bedenken über die Richtigkeit der Zahlen zu zerstreuen", eine genaue Auseinandersetzung des Baues seiner Tafeln in 30 Sätzen und fügte sie denselben bei. Das Erscheinen der Schrift verzögerte sich aber infolge verschiedener Umstände noch bis zum Jahre 1624[1]), und die Gebrauchsanweisung kam erst ein Jahr später als „Supplementum Chiliadis Logarithmorum" ans Tageslicht. Da Kepler darin auch zeigte, wie man die Logarithmen zur Vereinfachung der trigonometrischen Berechnungen praktisch verwenden konnte, so war das neue Werk wohl imstande, Nepers in Deutschland schwer erhältliche Schrift zu ersetzen, obgleich nicht verschwiegen werden darf, daß die letztere, was die Methoden zur Behandlung der einzelnen Dreiecksfälle anlangt, reichhaltiger als Keplers Supplementum ist. Dieser bedient sich nämlich fast durchweg der Zerspaltung schiefwinkliger Dreiecke in zwei rechtwinklige und geht nur in einem Falle über seinen Vorgänger hinaus, indem er zur Lösung der Aufgabe[2]), aus drei Winkeln eines sphärischen Dreiecks eine Seite zu bestimmen, die Polarformel zu den von Neper zuerst angewandten (S. 14) in der durch Logarithmierung der Gleichung

Logarithmen ein + oder — beifügte, wenn der Logarithmus um $\frac{1}{4}$ bis $\frac{1}{2}$ einer Einheit der letzten Stelle zu klein oder zu groß genommen ist.

1) Über die Druckgeschichte dieser Schrift sehe man die Vorrede Frischs in Opera VII, 295—311. — 2) Opera VII, 364.

$$\cos\frac{b}{2} = \sqrt{\frac{\cos\frac{\beta+\alpha-\gamma}{2}\cos\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}}{\sin\alpha\sin\gamma}}$$

erhältlichen Form zum erstenmal ausspricht, während Neper diesen Fall noch mit rechtwinkligen Dreiecken behandelte.[1]) Die Formulierung seiner Sätze entspricht genau der von Neper eingeführten Art und Weise, die sich noch lange Zeit erhielt.

Hier müssen wir auch noch eines goniometrischen Satzes gedenken, auf den Kepler an mehreren Stellen zurückkommt. In dem Comm. de stella Martis sagt er nämlich[2]), daß, wenn α ein kleiner Winkel ist, die Proportion bestehe:

$$(\sin\alpha + \sin 2\alpha + \cdots + \sin n\alpha) : \left(\sin\alpha + \sin 2\alpha + \cdots + \sin\frac{\pi}{2}\right) = (1 - \cos n\alpha) : 1,$$

ein Satz, den er wahrscheinlich durch Induktion fand. Außerdem kennt er auch den Satz, daß $\sec 89^0 + \operatorname{tg} 89^0 = \sin 1^0 + \sin 2^0 + \cdots + \sin 90^0$ ist, welchen zuerst Cardano in seinem liber de subtilitate gegeben hat. Dabei bemerkt Kepler, Bürgi habe denselben bewiesen.[3]) Übrigens hatte schon Archimedes in seiner Schrift über die Kugel und den Zylinder den Wert der Summe $\operatorname{crd}\alpha + \operatorname{crd} 2\alpha + \cdots + \operatorname{crd} n\alpha$ geometrisch abgeleitet.[4])

Auf seine Logarithmen ist Kepler später noch einmal zurückgekommen, indem er in seinen 1627 erschienenen „Rudolfinischen Tafeln", die nach ganzen Intervallen wachsenden Zahlen, welche sich auf den Radius 10^7 bezogen, ganz wegließ und dafür die Logarithmen der Zahlen mitteilte, die von 5 zu 5 Sekunden nach dem in 60 Teile geteilten Radius oder von 2 zu 2 Minuten nach einem in 24 Teile geteilten fortschritten.[5]) Es war dies deshalb geschehen, weil er in jenen Tafeln noch immer die früher allgemein gebräuchliche Sexagesimalrechnung bevorzugte, um die ersteren allgemein zugänglicher zu machen. Außerdem teilt aber Kepler daselbst auch einen „Canon Logarithmorum et Antilogarithmorum ad singula Scrupula circuli" mit, der von 0^0 bis 90^0 läuft; ferner „Particula Canonis Antilogarithmorum exactiorum ad denarias secundorum, pro Eclipsibus", d. h. eine Tafel der Cosinus, die von $10''$ zu $10''$ von 0^0 bis $1^0\,40'$ fortschreitet[6]), und endlich eine Tafel der Logarithmen der Tangenten für alle Minuten der ersten 9 Grade. Für diese führt er den Namen „Mesologarithmen"

---

1) Descriptio 50—51. — 2) Opera Kepleri. Ed. Frisch. III, 390 u. 105. — 3) Ebenda III, 335. — 4) Vgl. Gino Loria „Le scienze esatte nell' antica Grecia. Lib. II, n. 38. — 5) Heptacosias logarithmorum logisticorum. — 6) Antilogarithmen heißen bei ihm nämlich die Logarithmen der Cosinus.

ein[1]), weil sie in Nepers Tafel in der Mitte standen. Diese Tabelle trägt die Überschrift: „Pars Canonis Mesologarithmorum ad Gradus 10 pro latitudine quinque planetarum."

Kepler beabsichtigte noch eine umfassende Logarithmentafel auszuarbeiten, wurde aber durch seinen zu frühen Tod daran gehindert. Sein Schwiegersohn Jakob Bartsch (1600—1633) führte das geplante Werk aus, indem er unter anderem die Logarithmen der Rudolfinischen Tafeln von Minute zu Minute berechnete. Seine „Tabulae novae logarithmicologisticae" wurden 1630 in Sagan gedruckt, und ebenda erschienen 1631 die „Tabulae manuales logarithmicae J. Kepleri et J. Bartschii".[2]) Dieselben fanden jedoch wenig Verbreitung, indem sie nur in einer geringen Anzahl von Exemplaren vorhanden gewesen zu sein scheinen, und wurden daher im Jahre 1700 von Johann Kaspar Eisenschmid mit geringen Veränderungen neu herausgegeben, da derselbe die Keplerschen Logarithmen für astronomische Rechnungen, bei denen es sich vielfach um die „logistischen Zahlen", d. h. die Sexagesimalbrüche handelte, den Briggsschen noch immer vorziehen zu müssen glaubte.[3])

Die umfassendste Tafel Neperscher Logarithmen aber, die in Deutschland erschien, war die von Peter Crüger (1580—1639) 1634 zu Danzig herausgegebene. Sie ist enthalten in seiner „Praxis trigonometriae logarithmicae cum logarithmorum tabulis ad triangula tam plana quam sphaerica sufficientibus" (klein 8°). Da die Napierschen Logarithmen, wie erwähnt, für die Rudolfinischen Tafeln unentbehrlich waren, und letztere bei den Astronomen noch auf längere Zeit im Gebrauche blieben, so wollte ihnen Crüger dieselbe Einrichtung geben, die Briggs seinen Tafeln schon früher zugrunde gelegt hatte, indem er nämlich die Logarithmen der Zahlen von denen der trigonometrischen Funktionen trennte. Die letzteren sind für $r = 10^5$ und auf alle Minuten der Winkel des Quadranten berechnet. Dann gab er noch eine Tabelle bei, welche die Logarithmen der Sinus aller Sekunden des ersten Grades enthält, und endlich eine Tafel, von Jakob Bartsch berechnet, die die Logarithmen der Cosinus (Antilogarithmen) von 0^0 bis $1^0\,41'$ von $2''$ zu $2''$ umfaßte. Den Tabellen geht eine Gebrauchsanweisung, sowie eine ganz im Sinne seiner Vorgänger gehaltene logarithmische Trigonometrie vorher, die keine Beweise der mitgeteilten Sätze gibt. Da das Büchlein,

1) Einleitung in die Rudolfinischen Tafeln, folio 19. Opera VI, 567. — 2) Kästner, Geschichte der Mathematik. III, 92. — 3) Kästner, ebenda III, 93. Keplers Chilias wurde später noch von Hutton in seiner Ausgabe der Tafeln von Sherwin und von Maseres in Scriptores logarithmici 1791. I, 93—166 publiziert.

laut Vorrede, hauptsächlich für Schüler bestimmt war, so scheint man damals im Unterricht Begründungen für unnötig erachtet zu haben, oder man ersetzte sie mündlich.

Aus der Schrift, die viel Beifall gefunden zu haben scheint, da sie noch nach dem Tode des Verfassers zwei Neuauflagen zu Danzig 1648 und zu Amsterdam 1654 erlebte, heben wir zwei Dinge hervor: die Behandlung des ebenen Cosinussatzes und die praktische Verwertung der Neperschen Analogieen. Des ersteren bedient er sich, um aus drei Seiten den Winkel zu bestimmen, indem er zunächst aus $\log x = \log (b + c) + \log (b - c) - \log a$, x berechnet und dann aus $\log \frac{a - x}{2} - \log c = \log \cos B$ den Winkel bestimmt, d. h. also er bringt den Cosinussatz in die Gestalt:[1])

$$\cos B = \frac{a - \frac{(b + c)(b - c)}{a}}{2c}.$$

In der sphärischen Trigonometrie gebraucht er, um aus zwei Winkeln und der Zwischenseite die beiden andern Seiten zu berechnen[2]), die entsprechenden Neperschen Analogieen ganz in der Weise, wie wir sie heute noch verwenden, und benutzt ähnlich auch die beiden Polarformeln derselben, um aus zwei Seiten und dem Zwischenwinkel die dritte Seite zu bestimmen.[3]) Die hierbei auftretenden Logarithmen der Cotangenten werden Antimesologarithmen genannt. Schon bedeutend früher, nämlich 1612 hatte Crüger eine „Synopsis Trigonometriae“ Dantisci in 12° herausgegeben, die die Bekanntschaft des Autors mit allen damals gebräuchlichen Methoden zeigt, ohne jedoch besonderes Neues zu bieten, weshalb wir sie auch hier nur vorübergehend erwähnen wollen.

Wir haben es versucht, ein Bild von der Ausbreitung und successiven Entwickelung der Neperschen Logarithmen in Deutschland zu geben, wo sie zuerst festen Fuß gefaßt hatten, bemerken aber, daß neben ihnen in der Zwischenzeit auch schon sehr bald die von Briggs und anderen für die Basis 10 erstellten Logarithmen Eingang gefunden hatten. Auf diese Tatsache werden wir wieder zurückkommen, wenn wir die Ausbildung dieses einfacheren Systems in England studiert haben.

---

1) Praxis Trigonometriae logarithmicae 33. Die natürlich in Worten gegebene Vorschrift ist allerdings etwas schwerfällig, wird aber durch ein beigegebenes Beispiel genügend erläutert. — 2) A. a. O. p. 40—41. — 3) A. a. O. p. 42—43.

§ 4. Die logarithmische Trigonometrie in England nach dem Tode Nepers.

Während innerhalb eines Zeitraumes von 20 Jahren die Logarithmen Nepers in Deutschland rasch Eingang, Verbreitung und Verbesserung erfuhren, waren die Mathematiker und Astronomen anderer Länder keineswegs müßig gewesen. Namentlich die Engländer, stolz auf die epochemachende Erfindung eines ihrer Landsleute, suchten das Erbe des großen Schotten nach Kräften zu verwerten. Nepers Logarithmentafel wies zwei Unbequemlichkeiten auf: einmal mußten die drei Spalten, in denen die Logarithmen der Sinus, Cosinus und Tangenten gegeben waren, auch zum Aufschlagen der Cosekanten, Sekanten und Cotangenten benutzt werden, und dann waren die Logarithmen teils positiv, teils negativ, da Neper den Logarithmus des Radius gleich Null gesetzt hatte und Logarithmen mit wachsenden Winkeln abnehmen ließ. Diesen Übelständen suchte John Speidell (1607—1646), Lehrer der Mathematik in London, zu begegnen, indem er zunächst schon 1619 in seinen „New Logarithmes" eine Tafel publizierte, welche 6 Kolumnen für die Logarithmen sämtlicher 6 Funktionen enthielt. Auch machte er alle Logarithmen positiv, indem er die arithmetischen Komplemente der Napierschen bildete, d. h. jene von 10^7 subtrahierte. Seine Tafel scheint sehr Anklang und Verbreitung gefunden zu haben, indem schon 1620 eine zweite, 1621 eine dritte, 1623 die fünfte und 1624 die sechste Auflage derselben erschien.[1]) Darin führte er noch die weitere Verbesserung durch, daß er eine neue Tafel beifügte, in welcher er die Neperschen Logarithmen der aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen von 1 bis 1000 zugleich mit ihren Differenzen und arithmetischen Komplementen gab. Hierbei traf er jedoch eine kleine Abänderung, indem er seinen Logarithmus irgend einer Zahl z gleich dem Neperschen Logarithmus von $\frac{1}{z}$ setzte, sodaß $\log 1 = 0$, $\log 10 = 2{,}302584$, $\log 10^n = n \cdot \log 10$ wurde. Diese Tafel enthält also die ersten hyperbolischen Logarithmen,[2]) wenn man von den Antilogarithmen Bürgis absieht.

Weit wichtiger für die folgende Entwickelung der logarithmischen

1) Cajori in A History of elementary Mathematics, New-York 1896, gibt p. 165 noch Auflagen von 1627 und 1628 an. — 2) Vgl. Hutton a. a. O. p. XXXIV und Glaisher a. a. O. p. 69. Genaueres über die Speidellsche Tafel findet man in Maseres Scriptores Logarithmici. VI, 711 ff. — Speidells Sohn Euklid publizierte 1688 eine Logarithmotechnie, in welcher er zeigte, wie man diese Logarithmen bis auf 25 Stellen berechnen kann, indem man die Hyperbel quadriert. Die Schrift ist abgedruckt in Maseres Scriptores Logarithmici. vol. II.

Trigonometrie war aber die Tätigkeit von Heinrich Briggs. Briggs, den wir schon vorübergehend kennen lernten, war in Cambridge aufgewachsen und begann dort im Jahre 1592 seine Lehrthätigkeit. 1600 wurde er Professor am Gresham College in London und 1619 erhielt er die in Oxford neu gegründete Savilesche Professur der Geometrie, die er bis zu seinem Tode 1630 inne hatte. Wir sahen schon, daß er zunächst eine Trennung der Zahlenlogarithmen von denen der trigonometrischen Funktionen vornahm und dieselben in der Weise aufbaute, daß er die Basis 10 zugrunde legte. Dieses System arbeitete er auch soweit aus, daß er 1624 eine 14stellige Tafel der Zahlen von 1 bis 20000 und von 90000 bis 100000 erscheinen lassen konnte.

Auch die trigonometrischen Logarithmen nahm er in Arbeit, und nach seinem Tode fand sich eine auf 10 Dezimalen berechnete, nahezu vollendete Tafel, in welcher statt der Sexagesimalteilung der Winkelgrade die dezimale Teilung eingeführt war, wie es schon Stewin beabsichtigt, aber, wie es scheint, nicht ausgeführt hatte.[1]) Dieser Fortschritt konnte sich jedoch, trotzdem Briggs' Tafel 1633 im Druck erschien, nicht einbürgern, wohl deshalb[2]), weil bereits Tafeln vorhanden waren, welche Zehnerlogarithmen bei sexagesimaler Teilung gaben und „ihren Besitzern also nicht das Aufgeben des zur zweiten Natur Gewordenen auferlegten".

Die Methode, deren sich Briggs zur Konstruktion dieser Tafeln bediente, welche die Sinus, Tangenten und Sekanten, sowie die Logarithmen der Sinus und Tangenten angibt, ist für die Folgezeit von solcher Bedeutung geworden, daß wir sie in kurzen Zügen schildern müssen. Das Werk, in dem sie enthalten ist, führt den Titel „Trigonometria Britannica", ist von Heinrich Gellibrand, Professor am Gresham College, 1633 herausgegeben und zerfällt in zwei Teile, von denen der erste aus Briggs' Feder stammt und seine Rechnungsmethode enthält. Zunächst verbreitet sich Briggs hier über die Herstellung einer korrekten Sinustafel, wobei er folgenden Plan verfolgt. An Vieta anknüpfend, den er mehrfach zitiert, studiert er zunächst die Teilungsgleichungen und stellt zur Bildung ihrer Koeffizienten einen „Abacus" auf (p. 23), der genau mit jener Tafel übereinstimmt, die wir bei Bürgi (Erster Teil S. 208) kennen lernten. Eine zweite noch umfassendere Tabelle, der „Abacus παγχρηστός", welcher durch Bildung der Summenreihen aus der natürlichen Zahlenreihe entsteht, dient ihm unter anderem zur Auffindung der Koeffizienten aufeinanderfolgender Potenzen eines Binoms. Nun teilt er

1) Glaisher a. a. O. 173. — 2) Vgl. Cantor II, 2, 743.

den Kreis in 360°, den Grad aber in 625 Tausendstel $\left(=\frac{5}{8}\right)$. Vom Sinus des Winkels von 60° ausgehend, berechnet er dann die Sinus aller Winkel von $\frac{5^0}{8}$ zu $\frac{5^0}{8}$, indem er die Teilung in 2, 3, 5 und 7 Teile und die Vervielfachung bis zum 19fachen anwendet. Die Lösung der Teilungsgleichung wird stets mit dem uns längst bekannten Divisionsverfahren der Araber, das wir bei Bürgi und Pitiscus wieder trafen, ausgeführt. Da er sich aber zum Ziel setzt, eine Sinustafel zu konstruieren, die nach Tausendstel Graden fortschreitet, so teilt er zunächst jedes Intervall in 5 gleiche Teile und wiederholt diese Teilung noch dreimal. Die Zwischenwerte werden aber nicht etwa direkt mit den Teilungsgleichungen berechnet, sondern mit einer Differenzenmethode interpoliert, deren Begründung er jedoch nicht gegeben hat.

Es ist hier nicht der Platz, auf diese geniale und auch heute noch benützte Methode näher einzugehen.[1]) Sie wurde zum erstenmal von Lagrange 1792/93[2]) exakt bewiesen, dann 1815 von Legendre[3]) wieder untersucht und gewürdigt, 1844 gab Fréderic Maurice[4]) eine Ableitung mit den Hilfsmitteln, die Briggs zu Gebote gestanden hatten, 1893 ließ Koppe[5]) eine sehr übersichtliche Darstellung erscheinen und 1896 hat sie A. A. Markoff in seiner Differenzenrechnung[6]) abermals begründet.

Fragt man, wie Briggs zu seiner Methode gekommen ist, so wird man aus der Art und Weise, wie er seine Differenzentabellen anordnet, unwillkürlich an das Schema erinnert, das einst Reimers mit jenen mysteriösen Andeutungen versehen in seinem Fundamentum astronomicum veröffentlichte (I. Tl. S. 205). Entweder hat Briggs, was uns das Wahrscheinlichste dünkt, dem Sinne dieser Andeutungen nachspürend, das Wesen von Bürgis Methode durchschaut, oder es kamen ihm aus irgend einer unbekannten Quelle nähere Mitteilungen über dieselbe zu.

Nachdem Briggs in einem folgenden Kapitel (XIV) noch darauf hingewiesen, daß es am rationellsten wäre, den Kreisumfang in 100 Teile zu teilen und dann in der Dezimalteilung weiterzufahren, wendet er sich zu den Logarithmen der trigonometrischen Funktionen, bezüglich deren Berechnung er auf seine „Arithmetica Logarithmica" ver-

1) Vgl. über sie Mathem. Encyklopädie I D 3 Nr. 9, 812—814. — 2) Nouvaux Mémoires de l'Acad. de Berlin, Werke V, 663—684, schon 1761 hatte Lalande auf sie aufmerksam gemacht. — 3) Connaiss. de temps pour 1817, 219 ff. — 4) Ebenda pour 1847, 198—207. — 5) „Die Behandlung der Logarithmen und der Sinus im Unterricht", Programm der Andreasrealschule in Berlin 1893, 30. — 6) Deutsch von Friesendorff und Prüm 1896, 47—49.

weist. Sie sind auf der Basis 10 aufgebaut und bis auf 15 Dezimalen bestimmt; auch die Charakteristik (das Wort wird von Briggs schon in seiner „Arithmetica“ gebraucht) ist genau so angegeben, wie es noch heute geschieht, und die Tafel, die an und für sich auf Tausendstel Grade berechnet ist, ist auch für das Sexagesimalsystem dadurch einigermaßen verwendbar gemacht, daß die Winkelwerte in Minuten und Sekunden rechts beigeschrieben sind. Die Tafel umfaßt die Werte der Sinus, Tangenten und Sekanten, sowie die Logarithmen der beiden ersten Funktionen, läßt die ersten Differenzen direkt ablesen und ist mit großer Genauigkeit hergestellt.

Gellibrand (1597—1637), der, wie schon bemerkt, aus Briggs' Nachlaß den ersten Teil der „Trigonometria Britannica“, sowie die eben beschriebene Tafel herausgab, nimmt in seiner Vorrede den zweiten Teil des Werkes, welcher Methoden zur Berechnung der ebenen und sphärischen Dreiecke enthält, für sich in Anspruch. Doch finden sich auch hierin Spuren von Briggs, so z. B. die Formel[1]) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$ zur Berechnung eines Winkels aus den drei Seiten eines ebenen Dreieckes, die wir schon bei Rhäticus und Snellius entstehen sahen (1. Teil S. 215 und 242). Bemerkenswert ist, daß Gellibrand auch implizite die logarithmierbaren Formeln zur Berechnung einer Seite eines sphärischen Dreiecks aus den drei Winkeln kennt, d. h. er bildet die Supplemente der Winkel und führt so die Aufgabe auf die polare zurück, die er dann mit der schon Neper bekannten Formel für den Sinus des halben Winkels löst (Probl. XII, p. 108). Das Supplementardreieck des Snellius war ihm überhaupt völlig geläufig. Außerdem kennt er die sphärische Formel für $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. Im übrigen bietet dieser zweite Teil nur eine allerdings recht übersichtliche Zusammenstellung und Ausarbeitung der von Neper, Briggs und anderen überkommenen Lehren, die sich namentlich dadurch auszeichnet, daß fast immer zuerst der Wortlaut der trigonometrischen Sätze angeführt und dann erst ihre Verwendung für logarithmische Rechnung gezeigt wird. Bemerkenswert ist ferner, daß sich in der Trigonometria Britannica wohl alle vier Neperschen

1) Trigonometria Britannica lib. III, pars I, cap. V, 75. Arithmetica logarithmica 1624, cap. 18. Franciscus a Schooten, der die 4 Formeln für $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$ zusammenstellt und beweist (Exercitationum mathem. libri V, Lugd. Bat. 1657, 499 ff.), schreibt ihre Erfindung unrichtigerweise einem irländischen Mathematiker Namens Wilhem Purser zu. — Über spätere Beweise dieser Formeln bei Newton, Boscowich, Klügel u. a. siehe Pfleiderer, Ebene Trigonometrie 1803, 402 ff.

Analogieen zum erstenmal genau in der Form ausgesprochen finden[1]), in welcher wir sie noch heute verwenden, abgeleitet sind sie jedoch merkwürdigerweise auch hier nicht.

Zwei Jahre nach dem Erscheinen dieses Buches veröffentlichte derselbe Gellibrand noch ein zweites Tafelwerk, in welchem die Zehnerlogarithmen der ersten 10000 Zahlen, sowie die Logarithmen der trigonometrischen Funktionen für alle Minuten auf 7 Stellen enthalten waren.

Leider war Briggs' vortreffliche Tafel zu spät erschienen, um der zentesimalen Gradeinteilung noch Eingang verschaffen zu können, denn schon 1620 hatte Edmund Gunter in seinem „Canon Triangulorum", London in 4°, eine logarithmisch-trigonometrische Tafel veröffentlicht[2]), welche Zehnerlogarithmen auf 7 Dezimalen gab und dabei die Sexagesimalteilung des Kreises aufrecht erhielt. Gunter war 1581 in Herfordshire geboren, 1619 Professor der Astronomie am Gresham College in London und Vorgänger Gellibrands, während Briggs zur nämlichen Zeit die Professur für Geometrie daselbst bekleidete. Er starb 1626. In dem erwähnten Werke führte Gunter auch die Bezeichnung Cosinus und Cotangens ein, indem er statt des bisher gebräuchlichen „sinus complementi" „co. sinus" schrieb; ferner schreibt ihm Briggs ausdrücklich die Einführung der dekadischen Ergänzung in die logarithmische Rechnung zu[3]), und auch die Idee der logarithmischen Kurve soll von ihm stammen.[4]) Auf Gunters Schrift beziehen sich, ähnlich wie auf die Arbeiten Briggs', viele spätere Bearbeiter der Trigonometrie, so daß ihm neben seinem berühmteren Kollegen ein hervorragender Einfluß auf die Weiterbildung derselben nicht abgesprochen werden kann.

§ 5. Die Einführung der dekadischen Logarithmen in den Niederlanden, in Deutschland, Frankreich, Italien und Schweden.

In den Niederlanden, wo noch im Jahre 1627 die Trigonometrie von Snellius erschienen war, die keinerlei Notiz von der Erfindung der Logarithmen nahm, wurden dieselben durch Adriaen Vlacq bekannt gemacht. Vlacq oder Vlack[5]) war in der holländischen Stadt

---

1) Trigonometria Britannica 93, 99, 100, 105. — 2) Neu aufgelegt 1623 in 4° und 1673 in „The Works of G." London. 4°. — 3) Briggs, Arithmetica logarithmica. Cap. XV. — 4) Hutton a. a. O. XL. Gunters Tafel, die nach Glaishers Angabe in den letzten Stellen viele Fehler enthält, erschien 1673 noch einmal in London in 5. Auflage in 4°: The Works of Ed. Gunter with a canon of artificial sines and tangents. — 5) Siehe das Biographische bei Cantor II, 2, 743.

Gouda (1600?) geboren. Während seines Aufenthaltes in seiner Vaterstadt war er 1626 bei der Firma Pieter Rammaseyn beschäftigt, die sowohl seine Werke, als die Geometria Britannica herausgab. Von 1633 bis 42 lebte er als Buchhändler in London, siedelte dann nach Paris über und ließ sich 1648 in Haag als Buchhändler nieder. Von 1665 an geht uns seine Spur verloren. Während des Aufenthaltes in Gouda studierte er im Verein mit einem dortigen Feldmesser und Lehrer der Mathematik Ezechiel De Decker die Schriften von Neper, Gunter und Briggs, und da sie fanden, daß selbst hervorragende Mathematiker seines Vaterlandes mit diesen Werken noch nicht bekannt waren[1]), so beschlossen beide, dieselben in holländischer Sprache und unter dem Titel „Erster deel von de Nieuwe Tellkonst" herauszugeben. Dieser „Erste Band der neuen Zahlenkunde" erschien auch 1626 in 4°[2]) und zwar unter dem Namen De Deckers und enthielt die Schriften Nepers und einiges andere. Aber in demselben Jahre veröffentlichte De Decker in dem gleichen Verlag ein zweites Werk in 8° mit dem Titel „Nieuwe Tellkonst", das auch die Tafeln von Briggs und Gunter enthielt, aber nicht als zweiter Band des ersterwähnten bezeichnet wurde, vielmehr gab De Decker an, daß dasselbe nur einstweilen bis zum Erscheinen eines größeren Werkes als Ersatz dienen solle. Ein zweiter Band desselben ist aber nie erschienen; dagegen gab Vlack 1628 allein seine „Arithmetica logarithmica" in fol. heraus, die wohl diesen Ersatz bieten sollte; De Decker, dem das Verdienst zukommt, zum erstenmal auf dem Festlande Briggssche Zahlenlogarithmen in Druck gegeben zu haben, erwähnt er hier mit keinem Worte.

Er stützt sich in diesem Werke auf die von Briggs in seiner „Arithmetica logarithmica" gegebenen Methoden, die er eingangs anführt, ergänzt zunächst die Lücke, welche Briggs in seinen Tafeln von 1624 gelassen hatte, und gibt so, indem er auch die Briggsschen Logarithmen nur um 4 Stellen gekürzt wieder abdruckt, eine vollständige Tafel aller zehnstelligen Logarithmen der natürlichen Zahlen von 1 bis 100000. Dieser Tafel fügt er aber noch den „Canon triangulorum sive tabula arteficialium Sinuum, Tangentium et Secantium" bei, welchen er mit Hilfe der ersten Tafel aus dem Thesaurus des Pitiscus berechnet. Diese Tafel ist elfstellig und gibt die Logarithmen der trigonometrischen Funktionen in 6 nebeneinander stehenden Spalten von Minute zu Minute mit Beifügung der ersten Diffe-

1) Vlack, Arithmetica logarithmica 1628. Einleitung. — 2) Eingehende Untersuchungen über Vlacks und De Deckers Schriften finden sich bei Glaisher, Philosophical Magazine V. 44. 1872 und 1873 und bei Bierens de Haan, Bulletino di Bibl. e di Storia. t. 6. 1873.

renzen. Jeder Grad umfaßt zwei Folioseiten, und die Tafel läuft bis 45° und zurück.[1]) Briggs bespricht Vlacks Werk in einem Briefe vom 25. Oktober 1628 und führt an, daß davon 1000 Exemplare in lateinischer, holländischer und französischer Sprache gedruckt und bereits fast sämtlich verkauft worden seien. Dieser enorm rasche Absatz findet seine Erklärung darin, daß ein Londoner Buchhändler Miller einen großen Teil der Auflage aufkaufte und dann 1631 die einzelnen Exemplare mit einer englischen Vorrede versehen in seinem Verlage erscheinen ließ.[2])

Noch ein zweites Werk ist aus Vlacks Feder hervorgegangen, die „Trigonometria artificialis sive magnus Canon triangulorum logarithmicus", welches ebenfalls zu Gouda 1633 erschien. Der erste Teil dieses Werkes ist jedoch nur ein wörtlicher Abdruck von Gellibrands zweitem Buche der „Trigonometria Britannica", was Vlack auch angibt, während der zweite Teil die Briggsschen Logarithmen von 1 bis 20000 und die Logarithmen der Funktionen Sinus, Cosinus, Tangens und Cotangens von 10″ zu 10″ mit Angabe der Differenzen und auf 10 Stellen gibt. Daß dieses Werk fast gleichzeitig mit der Trigonometria Britannica erschien, ist wohl auf die Vermutung zurückzuführen, daß die in letzterem Buche gegebene zentesimale Gradeinteilung nicht den gewünschten Anklang finden werde, wie es thatsächlich auch der Fall war.[3])

Durch die Herstellung dieser Tafelwerke und ihren buchhändlerischen Vertrieb hat sich Vlack ein unleugbares Verdienst um die Trigonometrie, sowie überhaupt um die Verbreitung der Briggsschen Logarithmen erworben, denn auf ihnen fußen alle späteren Werke von ähnlichem Charakter. Seine Nachfolger hatten auch thatsächlich nichts weiter mehr zu thun, als den Tafeln eine etwas bequemere Einrichtung zu geben und die in ihnen enthaltenen Druck- und Rechenfehler aufzusuchen und zu verbessern.

Wir erwähnten oben, daß Vlacks Arithmetica logarithmica 1628 auch in französischer Sprache ausgegeben wurde; das beweist, daß auch in Frankreich das Bedürfnis nach den Logarithmen bereits vor-

1) Nach Angabe Glaishers, Report of the British Association for 1873, London 1874, 53 sind in dem Riesenwerke bis dahin 300 Fehler nachgewiesen worden, wenn man die Ungenauigkeiten der letzten Stelle außer acht läßt, eine Liste derselben ist in den „Monthly Notices of the R. Astronomical Society" für Mai und Juni 1872 gegeben. — 2) Cantor II, 2, 745. — 3) Außerdem veröffentlichte Vlack noch 1636 seine trigonometrischen Tafeln des ersten Werkes auf 7 Stellen gekürzt in 8° zu Gouda und 1661, 65, 66 zu la Haye, wo er ebenfalls einen Verlag hatte. — Das Werk von 1633 ist in zweiter Auflage in Peking 1721 herausgegeben worden. Vgl. Schoute, Notiz zur Geschichte der Logarithmentafeln. Mittl. der Hamburger mathem. Gesellschaft 1901, 54.

handen war, und in der Tat hatte schon drei Jahre früher Edmund Wingate (1593—1656), ein Londoner Advokat, der sich von 1624 an einige Jahre in Paris aufhielt, daselbst eine Arithmetique logarithmique veröffentlicht, von welcher 1628 eine Ausgabe bei P. Rammaseyn[1]) und 1635 eine englische Übersetzung in London erschien.[2]) Auch gab 1626 der Professor der Mathematik in Paris Denis Henrion einen „Traité de logarithmes" in 8⁰ heraus, der sich ebenfalls auf Gunters Tafeln stützte und siebenstellige Logarithmen der Sinus und Tangenten für jede Minute enthielt. Die erste in Frankreich überhaupt erschienene Logarithmentafel war ein Abdruck von Nepers beiden Schriften, den der Buchhändler Bartholomäus Vincent in Lyon 1620 besorgt hatte.[3])

Kehren wir nach Deutschland zurück, so ist hier wohl der Ulmer Kriegsbaumeister und Lehrer der Mathematik Johann Faulhaber (1580—1635) als derjenige zu nennen, der in seiner 1630 erschienenen „Ingenieurschul" zuerst Briggssche Logarithmen einführte; jedenfalls ist er der Erste, der eine Schrift in deutscher Sprache über sie herausgab.[4]) Diese Ingenieurschule, die er für den Praktiker schrieb, und die uns von seinen zahlreichen Werken[5]) allein interessiert, enthielt eine kurze Gebrauchsanweisung der Tafeln für trigonometrische Funktionen und der Tafeln Briggsscher Logarithmen derselben, sowie der natürlichen Zahlen, gab kurze Regeln zur Behandlung ebener und sphärischer Dreiecke und Anwendungen auf praktische Aufgaben, und schloß mit einem „Appendix", welcher Vlacks zehnstellige Tafeln der Logarithmen der Funktionen für alle Minuten, sowie der ganzen Zahlen von 1 bis 10000 brachte.[6])

Durch dieses Buch, welches sehr große Verbreitung fand und schon deshalb, weil es deutsch geschrieben war, in weitere Kreise drang, hat Faulhaber jedenfalls dazu beigetragen, den Vorzug der Briggsschen Logarithmen vor denen Nepers und Keplers ins Licht zu stellen und sie populär zu machen, so daß dieselben von dieser Zeit an in Deutschland auch zu praktischen Zwecken, namentlich für die Feldmeßkunst und die Höhenmessungen, verwendet wurden. In

1) Diese lag mir vor, sie findet sich auf der Münchner Hof- und Staatsbibliothek. — 2) Cantor II, 2, 746 und Glaisher a. a. O. p. 53. Sie enthielt die Zehnerlogarithmen der Sinus und Tangenten Gunters, wie Wingate selbst angibt. — 3) Hutton a. a. O. p. XXXIV. — 4) Er sagt in seiner Ingenieurschul p. 123: „Also weiß ich der Zeit auch keinen Authorem, welcher in Teutscher Sprach die Sphärischen Triangel durch die Logarithmen hätte lehren außrechnen." — 5) Vgl. hierüber Kästner, Gesch. der Math. III, 111—152; über seinen Lebenslauf und seine sonstige Bedeutung Cantor II, 2, 670 ff., 625. — 6) Diese Tafeln erschienen auch separat im Jahre 1630 und 1631 bei Aperger in Augsburg.

dieser Verbreitung logarithmisch - trigonometrischer Rechnung in Deutschland liegt aber auch das einzige Verdienst von Faulhabers Schrift, Verbesserungen in theoretischer Beziehung, sei es die Logarithmen, sei es das System der Trigonometrie selbst anlangend, kann man ihm nicht zusprechen.

In Italien scheinen die Briggsschen Logarithmen erst 1632 durch Bonaventura Cavalieri eingeführt worden zu sein, der in seinem Werke „Directorium generale uranometricum", Bologna 1632 Tafeln achtstelliger Briggsscher Logarithmen der Sinus, Tangenten, Sekanten und der Sinusversus publizierte. Dieselben erstrecken sich in den ersten 5 Minuten auf alle Sekunden, von der 5. bis zur 10. Minute auf jede fünfte Sekunde, von der 10. bis zur 20. Minute auf jede zehnte Sekunde, von da bis zur 30. Minute auf jede zwanzigste Sekunde, von hier ab bis zu 1° 30′ auf jede dreißigste Sekunde und auf alle Minuten für den Rest des Quadranten. Die Tafel der Logarithmen der Sinusversus ist die erste dieser Gattung.[1])

Cavalieri[2]), ein Schüler Galileis und hervorragender Mathematiker, dessen Namen die Geschichte in verschiedenen Gebieten mit Ehren nennt, war wahrscheinlich 1591 geboren, wurde 1629 in Bologna auf Galileis Empfehlung als Professor angestellt und blieb dort bis zu seinem 1644 erfolgten Tode. Das Directorium generale zeigte, daß er die Arbeiten seiner bedeutendsten Vorgänger sehr wohl kannte, es geht dies aus der Anführung ihrer Namen hervor. Wichtig ist eine Bezeichnung der Funktionen, die er hier zum erstenmal konsequent durchführt; er unterscheidet nämlich die drei Funktionen und die drei Kofunktionen durch Zusetzen der Wörter „primus", beziehungsweise „secundus", so daß also z. B. tangens prima = tangens, tangens secunda = cotangens ist. Ebenso unterscheidet er einen Sinus versus primus und einen Sinus versus secundus. Dazu kommt eine eigentümliche Bezeichnung der Logarithmen dieser Funktionen: die Logarithmen der Tangenten heißen wie bei Kepler Mesologarithmen, die der Sekanten Tomologarithmen, die der Sinusversus Versilogarithmen, während die der Sinus wie bei Neper schlechtweg Logarithmen genannt werden. Statt des Kommas, „dessen Briggs, zur Abtrennung der Charakteristik, sich bedient", nimmt er den Punkt. Die 6 Funktionen werden wie bei Rhaeticus am rechtwinkligen Dreieck eingeführt, die Sätze zur Dreiecksberechnung aber nicht, wie bei Neper nur in logarithmischer Form ausgesprochen, sondern zuerst trigonometrisch formuliert. In seiner sphärischen Trigono-

---

1) Hutton a. a. O. XLII. — 2) Vgl. Cantor II, 2, 709ff. Der Name wird auch Cavalerius, Cavallierius, Cavaglieri, de Cavalleriis geschrieben.

metrie teilt er (p. 203) einen Beweis der Neperschen Regel mit, „den weder Neper, noch Ursinus, noch irgend sonst jemand, soviel er wisse, beibrachte". Dieser besteht aber einfach darin, daß er zeigt, wie die 10 von ihm vorher auf anderem Wege aufgestellten Analogieen in diese Regel passen. Die von Neper angegebenen Sätze, welche Sinus und Cosinus eines halben Dreieckswinkels durch die drei Seiten ausdrücken, erfahren hier zum erstenmal eine vollständige Begründung. Dabei weist er zunächst die Gleichung:

$$\{\sin a \cdot \sin c\} : r^2 = \{\operatorname{sinvers} b - \operatorname{sinvers}(c-a)\} : \operatorname{sinvers} B$$

an der Figur des Analemmas nach und leitet dann geometrisch die Proportion:

$$\{\operatorname{sinvers} b - \operatorname{sinvers}(c-a)\} : \operatorname{sinvers} B$$
$$= \left\{\sin\left(\frac{b}{2} + \frac{c-a}{2}\right)\sin\left(\frac{b}{2} - \frac{c-a}{2}\right)\right\} : \sin^2\frac{B}{2}$$

ab; dann folgt aus der Verbindung beider unmittelbar der Satz.

Für die Neperschen Analogieen[1]) ist ihm offenbar ein einfacher Beweis nicht gelungen, indem er sagt, dieselben scheinen ihm eine subtilere Untersuchung zu erfordern, und deshalb verschiebe er die Mitteilung eines Beweises auf eine spätere Gelegenheit. Doch ist er unseres Wissens nicht mehr darauf zurückgekommen. Bemerkenswert ist auch eine Zusammenstellung von sechs für die Berechnung schiefwinkliger sphärischer Dreiecke sehr verwendbaren Sätzen, die sich ergeben, wenn man in dem Dreieck ABC von der Spitze A den senkrechten Bogen AD auf BC fällt. Dieselben lauten[2]):
1) $\cos C : \cos BD = \cos b : \cos CD$, 2) $\sin A_1 : \cos B = \sin A_2 : \cos C$, 3) $\operatorname{cosec} c : \sin B = \operatorname{cosec} b : \sin C$, 4) $\operatorname{ctg} c : \cos A_1 = \operatorname{ctg} b : \cos A_2$, 5) $\sin BD : \operatorname{ctg} B = \sin DC : \operatorname{ctg} C$, 6) $\operatorname{tg} BD : \operatorname{tg} A_1 = \operatorname{tg} DC : \operatorname{tg} A_2$; hierbei wurde $\sphericalangle BAD = A_1$, $\sphericalangle CAD = A_2$ gesetzt. Den zweiten dieser Sätze trafen wir bereits bei Regiomontan (S. 128, I. Tl.), den fünften und sechsten bei Naṣîr Eddîn (S. 68, I. Tl.), die übrigen dürften wohl bei Cavalieri zum erstenmal vorkommen.

Endlich gibt Cavalieri in seinem V. Axiom (Kap. VIII, p. 315 ff.) die Flächenformel für das sphärische Dreieck und zwar zum erstenmal mit einem ziemlich einwandfreien Beweise für dieselbe, ein Beweis, der sich bis heute in unseren Lehrbüchern erhalten hat. Daß er in Harriot und Girard bereits Vorgänger in der Entdeckung dieser wichtigen Flächenformel hatte, wußte er,

1) In einem Korollar teilt er dann auch noch die beiden Polarformeln zu denen Nepers mit und gibt an, wie man sie mit jenem Nebendreieck des Supplementardreiecks finden kann, dem wir bei Pitiscus, Magini und anderen begegneten. — 2) Directorium p. 242.

wie aus einer Bemerkung hervorgeht, nicht. Merkwürdig ist, daß, obgleich der wichtige Satz hier gebührend hervorgehoben[1]) und in dem zweiten trigonometrischen Werke des Autors von 1643 wieder ausgesprochen wurde, doch noch eine geraume Zeit verging, bis er allgemeine Aufnahme fand, ja Roberval glaubte noch 1655 das Prioritätsrecht der Entdeckung dieser Formel für sich in Anspruch nehmen zu dürfen[2]), indem er Cl. Mydorge am Ende des folgenden Jahres brieflich einen Beweis des Satzes mitteilte, der übrigens in der Hauptsache mit dem des Cavalieri übereinstimmte. Da Cavalieris Werk sehr große Verbreitung fand, so ist es kaum begreiflich, daß Roberval diesen Beweis nicht kannte. Der Flächenformel für das sphärische Dreieck wurde bald die allgemeinere für ein beliebiges von Bögen größter Kreise gebildetes Polygon hinzugefügt, indem der Krakauer Mathematiker Jan Brożek oder Broscius (1585—1652) dieselbe in seinem Werke „Apologia pro Aristotele et Euclide contra Petrum Ramum et alios“, Dantisci 1652 in 4°[3]) in der Gestalt angab:

$$\text{Fl.} = \frac{\mu - (n-2)\pi}{4\pi} \cdot S,$$

wo μ die Winkelsumme des Polygons, n die Anzahl seiner Ecken und S die Kugeloberfläche ist.

Doch kehren wir noch einmal zu Cavalieri zurück! Außer dem besprochenen Directorium generale schrieb er noch eine „Trigonometria plana et sphaerica, linearis et logarithmica“, Bononiae 1643, die aber nichts Bemerkenswertes enthält; ferner ein „Compendio delle Regole de' Triangoli colla loro dimostrazioni“, Bologna 1638 in 12°

1) Legendre sagt (Journal de l'école polytechnique 1798, p. 275), man solle den Satz dem Cavalieri zuschreiben, da erst er einen exakten Beweis desselben gegeben habe. — 2) Oeuvres complètes de Ch. Huygens I (Haag 1888), p. 370 und 518. Vgl. Cantor II, 2, 711. — 3) Das Werk wurde zum zweitenmal 1699 aufgelegt. In dieser Ausgabe bemerkt Brożek (p. 79), Briggs gebe an, die Flächenformel für das Dreieck sei von Harriot zuerst gegeben worden. Brożek teilt ferner mit, der Grieche Kabasilas (I. Tl., S. 91) habe in seiner Isagoge in librum tertium Almagesti Ptolemaei (1572 erschienen), welcher als Anhang die Optik des Vitellio (Witelo, siehe M. Curtze, Bull. di Boncompagni, IV, 49 u. 78, Zebrawski ebenda XII, 315 und noch einmal Curtze, Grunerts Archiv LXIV, 432, Cantor II, 2, 98) beigegeben war, in seinen Anmerkungen diesen Gegenstand behandelt. Der Kommentar des Kabasilas stand uns nicht zur Verfügung und in den beiden Ausgaben der Optik des Witelo von Tannstetter und Peter Apian, Norimb. 1535 und von Risner, Basileae 1572 steht unter No. 87 als von Kabasilas stammend nur die Messung der Fläche des Kugeloktanten. Über Brożek ist eine polnisch geschriebene Monographie 1884 in Krakau von Jan Nep. Franke erschienen. Vgl. die neuesten Untersuchungen über die Geschichte dieses Satzes bei G. Vacca, Bibliotheca math. 1902, 191—197, sowie M. Curtze, Abhandl. zur Gesch. der math. Wissenschaften XII, 1902, 332.

und endlich ein „Compendio delle Regole Trigonometriche e Centuria di Problemi per dimostrare l'uso de' Logaritmi nella Gnomonica, Astronomia etc.", Bologna 1639 in 12°. Diese letzte Schrift enthält, worauf Govi aufmerksam gemacht hat[1]), in Probl. 92, p. 486—492, eine Lösung der Aufgabe, den Logarithmus der Summe oder Differenz zweier Zahlen direkt aus den Logarithmen derselben zu finden. Es sei $a > b$, und $\log a$, sowie $\log b$ bekannt, $\log(a+b)$ und $\log(a-b)$ gesucht. Man bildet $\log b - \log a = \log\sin\psi$, also $\sin\psi = \frac{b}{a}$, hieraus berechnet man $\log\sin\frac{90^0+\psi}{2}$ und dann $\log 2 + 2\log\sin\frac{90^0+\psi}{2}$, dann ist $\log(a+b) = \log a + \log 2 + 2\log\sin\frac{90^0+\psi}{2}$. Ähnlich ist, $\log\sin\varphi = \frac{\log b - \log 2a}{2}$, oder $\sin\varphi = \sqrt{\frac{b}{2a}}$ gesetzt, $\log(a-b) = \log a + \log\cos 2\varphi$. Hier tritt also zum erstenmal das später unter anderen von Cagnoli, Giuseppe Zecchini Leonelli und C. F. Gauß wieder aufgenommene Problem der Herstellung von Additionslogarithmen auf und wird trigonometrisch behandelt. Endlich mag noch bemerkt werden, daß Cavalieri in derselben Schrift auch die quadratischen Gleichungen trigonometrisch löst. Alle diese Dinge werden aber geometrisch abgeleitet.

Wir schließen dieses Kapitel über die Einführung der Zehnerlogarithmen in den verschiedenen Kulturstaaten, indem wir noch bemerken, daß dieselben auch in Schweden, allerdings erst im Jahre 1698 erscheinen, zu einer Zeit, wo sie sonst überall längst festen Fuß gefaßt hatten. Nach den Untersuchungen von G. Eneström[2]) ist Petrus Elvius der Erste, welcher in Upsala eine vierstellige Tafel[3]) für die Logarithmen der Sinus, hauptsächlich zum Gebrauche der Feldmesser, veröffentlichte. Von 0° bis 60° sind die Logarithmen der Sinus für Winkel von 6′ zu 6′ angegeben, von 60° bis 75° für je 12′, von da aber nur für ganze und halbe Grade. Auf der 11. Seite des nur 16 Seiten umfassenden, sehr schlecht gedruckten Büchleins stehen Regeln zur Berechnung rechtwinkliger Dreiecke, während die Seiten 12—16 die Logarithmen der Zahlen von 1—699 und von 700—998 auf 5 Dezimalen enthalten.

Der Beginn des 17. Jahrhunderts hatte also eine Methode gebracht, welche die gesamte trigonometrische Rechnung vom Fundament aus umgestaltete. Ihr enormer Vorteil, von dem Laplace ein-

---

1) Atti della Reale Academia dei Lincei Anno CCLXXIII, 1875—76, Serie II, III. parte sec., 173 ff. — 2) Bibliotheca math. 1884, 121. — 3) Tabula compendiosa Logarithmorum sinuum. Ad quadranti gradus eorumque partes decimas, Nec non numerorum absolutorum ab unitate ad 1000, Edita a P. E. Upsaliae 1698. 8°.

mal sagt, „die Erfindung der Logarithmen verdoppelt durch Kürzung das Leben der Astronomen“, wurde namentlich von diesen und darunter in erster Linie von dem großen Kepler sofort erkannt und gewürdigt. Wir sehen, wie durch ihn und seine Freunde die Erfindung des schottischen Edelmannes zuerst in Deutschland Wurzel faßte, sich schnell verbreitete und verbessert wurde, während die übrigen Kulturstaaten mehr oder minder rasch nachfolgten. Zugleich untersuchten wir die Einwirkung des neuen Rechnungsverfahrens auf die Methoden der Trigonometrie selbst und sahen, daß schon Neper die Notwendigkeit einer Umgestaltung der alten Trigonometrie erkannt und in ihren Grundzügen durchgeführt hatte, und daß namentlich Briggs und Gellibrand seine Gedanken weiter ausbauten.

2. Kapitel.

Die Trigonometrie bis zum Beginne des 18. Jahrhunderts.

§ 1. Rein-trigonometrische Schriften.

Nachdem die Berechnung der Logarithmen durch Briggs' bewunderungswürdige Arbeitskraft auf eine feste Basis gestellt und wesentlich vereinfacht worden war, und Vlack seine Werke geschaffen hatte, die für alle Zeiten fundamental für die Herstellung logarithmischer Tabellenwerke blieben, verbreitete sich auch die Überzeugung von dem enormen Nutzen, den die neue Methode namentlich bei trigonometrischen Rechnungen bot, allgemein, so daß von den dreißiger Jahren des 17. Jahrhunderts ab dieses Rechnungsverfahren, wenn auch nicht ausschließlich, so doch hauptsächlich in fast allen einschlägigen besseren Schriften gelehrt wurde — die uns hiervon bekannt gewordenen Ausnahmen haben wir bereits im ersten Teile unseres Werkes angeführt.

Von solchen Schriften nennen wir zunächst: „Trigonometriae canonicae libri tres etc. Adjungitur liber quartus pro calculi tabulis logarithmorum“, Paris 1633. Das Werk, von welchem noch 1657 eine französische Ausgabe erschien, hatte zum Verfasser Jean Baptiste Morin (1583—1656), Professor der Mathematik und Vorgänger Robervals am Collège de France, hauptsächlich durch seine neue, vielumstrittene Methode der Längenbestimmung bekannt.[1]) Seine Schrift, in welcher er sich viel darauf zu gute tut, die trigonometrischen Sätze auf die absolut notwendige Zahl reduziert zu haben, bringt

1) Vgl. hierüber Montucla, Histoire IV, 543 ff.

nichts Neues, und die angehängten Logarithmentafeln sind nach Delambres Angabe[1]) ein Abdruck der Tafeln von Wingate.

Ebenfalls ein kompilatorisches Werk ist der „Clavis universi trigonometrica. Accidunt tabulae pro negocio trigonico“, Hamburg 1634 in 4° des Georg Ludwig Frobenius (1566—1645), der zuletzt Buchhändler in Hamburg war. Die Schrift ist insofern bemerkenswert, als in ihr die meisten Probleme auf drei verschiedene Arten: direkt, dann mit der prosthaphäretischen Methode und endlich mittelst der Logarithmen behandelt werden. Die Tafeln sind dem Opus Palatinum, beziehungsweise den Werken Vlacks entnommen. Das von großer Belesenheit zeigende Werk unterscheidet sich insofern angenehm von anderen jener Zeit, als es eine Menge gewissenhafter Zitate angibt.

In demselben Jahre, in welchem Frobenius' Schrift erschien, gab der französische Mathematiker Peter Herigone ein Sammelwerk heraus, das die ganze damals bekannte Mathematik umfaßte und zehn Jahre später (1644) noch einmal aufgelegt wurde. Es war in französischer und lateinischer Sprache gedruckt und führte den Titel „Cursus mathematicus nova brevi et clara methodo demonstratus etc.“ (6 Bände in 8°). In diesem eigentümlichen Werke, das übrigens für jene Zeit recht reichhaltig genannt werden muß, führte Herigone zum erstenmal eine wirkliche Zeichensprache durch, die er auch im 4. und 5. Band auf die Trigonometrie anwandte. Das Gleichheitszeichen wurde hier durch 2|2, das Ungleichheitszeichen durch 3|2 oder 2|3, je nachdem die größere Zahl auf der linken oder rechten Seite steht, vertreten. Für das Minuszeichen schrieb er $\sim$, für parallel $=$, für proportional π. Ein Quadrat ward durch ein vorgesetztes $\square$, ein Rechteck durch $\sqcap$ bezeichnet. In dieser Schreibweise findet z. B. der Cosinussatz der ebenen Trigonometrie[2]) folgenden Ausdruck:

$$2 \sqcap ab, bc\ \pi\ \square bc + \square ba \sim \square ac\ 2|2\ \text{rad.}\ \pi \sin < bad,$$

hierbei werden beständig (vgl. Fig. 5) in der Figur die Buchstaben des großen, im Texte die des kleinen lateinischen Alphabetes verwendet. Eine weitere Vereinfachung war die Bezeichnung der Dreieckswinkel durch die Eckbuchstaben, so

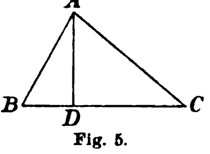


Fig. 5.

daß also z. B. $< a + < b + < c\ 2|2\ 180\,g$ unsere Gleichung $\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C = 180^0$ ersetzte.

Um den Tangentensatz kurz zu schreiben, bezeichnete er das Dreieck mit FGH und setzte: $a\ 2|2\ hf + hg$, $b\ 2|2\ hf - hg$,

---

1) Histoire de l'Astronomie mod. II, 238. — 2) A. a. O. t. IV, 102.

$c\, 2|2\, \frac{1}{2}$, $f + g$, dann war[1]) in einem von ihm gewählten speziellen Beispiel:

$$a\, \pi \text{ tangent. } c\; 2|2\; b\; \pi \text{ tangent. } 8\, g\, 43'.$$

Der ebenen Trigonometrie sind die Logarithmentafeln von Briggs und Gunter beigegeben. Seine sphärische Trigonometrie im V. Band gibt zu keiner besonderen Bemerkung Anlaß.

Bisher hatten wir aus den trigonometrischen Schriften dieser Epoche nicht viel Originelles zu verzeichnen; der Grund hierfür liegt einmal darin, daß die vorhandenen Methoden für die Astronomen ausreichten, so daß von dieser Seite eine Weiterbildung derselben momentan nicht erfolgte, andererseits aber hatte sich das Interesse der Mathematiker mehr der Ausmessung von Flächen- und Körperinhalten zugewendet; es begann die Zeit, in welcher die Grundlagen der Infinitesimalrechnung gelegt wurden. Jedoch blieben auch diese Bestrebungen nicht ganz ohne Rückwirkung auf die Trigonometrie. Um das Jahr 1634[2]) erfand Giles Persone de Roberval (1602—1675) seine Lehre vom Unendlichen, welche nachmals von seinem Freunde, dem Abbé Gallois 1693 als Traité des indivisibiles publiziert wurde.[3]) Darin bestimmte er den Flächeninhalt der Cykloide und gelangte dabei zur Konstruktion der Sinuslinie, die er in seinem Aufsatze „De Trochoide ejusque spatio" wiederholte, indem er sie die Begleiterin der Cykloide (trochoidis comes oder socia) nannte. Seine Konstruktion ist folgende.

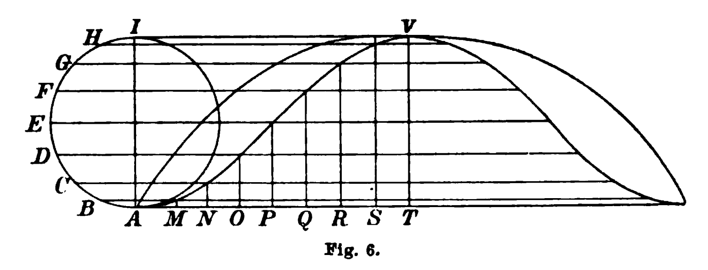


Fig. 6.

Er teilt den halben Umfang des Kreises, welcher durch Rollen die Cykloide erzeugt, in eine Anzahl gleicher Teile (Fig. 6) $AB = BC = CD = \cdots HI$, trägt auf der Basis der Cykloide AT die Strecken $AM = MN = NO = \cdots = ST =$ diesen Bogenteilen ab und zieht sowohl durch die Teilpunkte $B, C, \ldots H$ die Parallelen zu BT, als auch durch M, N, ... S die Parallelen zu TV, die Schnittpunkte je zweier entsprechender Parallelen sind direkt die Punkte der Kurve.

1) A. a. O, t. IV, 108—109. — 2) Siehe Cantor II, 2, 877. — 3) Poggendorff, Biographisch-literarisches Handwörterbuch II, 665. — Robervals Werke wurden nachmals gesammelt und in Mém. Acad. Sci. VI herausgegeben.

Man erkennt, daß diese Konstruktion nichts anderes als die Konstruktion der Kurve $y = \sin x$ aus den rechtwinkligen Koordinaten x und y ist. Der Name Sinuslinie findet sich jedoch bei Roberval nicht, wohl aber bei dem französischen Jesuiten Honoratus Fabri (1606(7)—1688), der 1659 ein „Opusculum geometricum de linea Sinuum et Cycloide" zu Rom herausgab und auch in seiner 1669 erschienenen „Synopsis geometrica", Lugd. 8°, eine exakte Definition dieser Kurve mitteilte (p. 313). Die Darstellungen der übrigen trigonometrischen Funktionen durch Kurven ließen auch nicht mehr lange auf sich warten, nachdem einmal durch Fermat und Descartes die Koordinatengeometrie allseits Eingang gefunden hatte, und andererseits die Berechnung krummlinig begrenzter Flächenräume im Mittelpunkt des Interesses stand. So zeichnet James Gregory (1638—1675), der uns noch öfters begegnen wird, um $\int_0^z \operatorname{tg} z\,dz = \log\sec z$ nachzuweisen, einen Teil der Tangentenkurve im ersten Quadranten[1]), und ähnliche Flächenbestimmungen veranlaßten John Wallis (1616—1703), Kaplan Karls II. und hervorragenden Mathematiker, in seinem „Tractatus de motu" 1670[2]) die Sekantenkurve zu zeichnen, deren Verlauf er für den ersten Quadranten richtig angab. Beide Kurven finden sich in einer Figur vereinigt in den „Lectiones opticae et geometricae", Lond. 1674 in 4°, von Isaac Barrow, dem Lehrer Newtons.

Zahlreiche trigonometrische und logarithmische Werke erschienen in der zweiten Hälfte des 17. Jahrhunderts in England — handelte es sich ja doch für die Engländer darum, die große Erfindung ihres Landsmannes auszubauen und fruchtbar zu machen. Erwähnen wir vorübergehend die ersten vollständigen siebenstelligen Briggsschen Logarithmen der Zahlen von 1 bis 100000, welche Nathaniel Roe 1633 veröffentlichte[3]), sowie eine vielbenützte Trigonometrie Richard Norwoods[4]), die uns leider nicht zu Gesicht kam, so kommen wir

1) Exercitationes geometricae Lond. 1668 in 4°: Methodus componendi Tabulas Tangentium et Secantium Arteficialium (d. h. der Logarithmen der Tangenten etc.) ex Tabulis Tangentium et Secantium Naturalium exactissime et minimo cum labore. — 2) Opera mathematica Johannis Wallis Oxoniae in 2°, I. 1695, p. 926 und II. 1703, p. 430, „A Letter from Wallis to Mr. Richard Norris concerning the Collation of Secants and the true Division of the Meridians in the Sea Chart. 1685. Die Fläche, welche von einer solchen Kurve, zwei Ordinaten und der Abscissenachse eingeschlossen wird, heißt in diesen Schriften „figura tangentium", bezüglich „secantium". Eine Kurve, deren Abscissen die Sinus und deren Ordinaten die Sekanten sind, hatte Gregory schon 1668 in seinen Exercitationes geometricae angegeben; Maseres, Scriptores logarithmici II, 6—16. — 3) Cantor II, 2, 747. Glaisher a. a. O. 124. 159. — 4) Trigonometria or the doctrine of triangles, London 1631, 4°. Dieses

zu einer wichtigen Schrift des auch sonst in der Geschichte der Mathematik bekannten Pfarrers William Oughtred[1]), die mehr Originalität als die übrige zeitgenössische Literatur aufweist. Dieselbe führt den Titel „Trigonometria, hoc est modus computandi Triangulorum latera et angulos, una cum Tabulis Sinuum, Tangentium etc.“ London 1657, 4°. Darin führte er folgende abkürzende Schreibweise für die trigonometrischen Linien ein: Sinus = s arc., Cosinus = s co arc.[2]), Secans = se arc. Tangens = t arc., Cotangens = t co arc.; Cosecans = sec co arc. Proportionen werden folgendermaßen geschrieben: t arc . Rad :: Rad . t co arc. Dieser von ihm eingeführte Gebrauch des aus vier Punkten zusammengesetzten Zeichens bürgerte sich bald ein und findet sich noch heute in manchen Schriften in Anwendung, während der einfache Punkt zur Bezeichnung des Verhältnisses später dem Doppelpunkt weichen mußte, nachdem der erstere von Christian Wolf als Multiplikationszeichen (an Stelle des von Oughtred benützten $\times$) in allgemeineren Gebrauch gekommen war. Als Gleichheitszeichen bediente er sich außerhalb der Proportionen des noch heute gebräuchlichen von seinem Landsmanne Robert Recorde 1556 zuerst verwendeten Zeichens.

Wie bei Girard und Herigone, so zeigt sich auch bei Oughtred das Bemühen, die trigonometrischen Sätze, die er allerdings zuerst in Worten aussprach, in übersichtlichen Gleichungen darzustellen. So schreibt er z. B. den Satz, welchen wir heute durch $\cos\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(a+b+c)(a+c-b)}{4ac}}$ ausdrücken, in folgender Form[3]):

$$\square \text{ crur} \cdot \frac{Z \text{ cru} + B}{2} \times \frac{Z \text{ cru} - B}{2} :: Rq \cdot Q \text{ s co } \tfrac{1}{2} \text{ ang.}$$

Hier bedeutet $\square$ Rechteck, Z cru die Summe der den Winkel einschließenden Schenkel (crurum), B Basis, Rq das Quadrat des Radius und Q s co $\frac{1}{2}$ ang. das Quadrat des Cosinus des halben eingeschlossenen Winkels. Leider fanden diese Bemühungen, allmählich auch eine trigonometrische Formelsprache herauszubilden, wenig Anklang, obwohl man schon hier und da analytisch zu rechnen versuchte. — Bemerkenswert ist noch, daß Oughtred wohl zum erstenmal für die ersten beiden Neperschen Analogieen einen voll-

---

Buch erfuhr mehrere Auflagen, so 1661 eine vierte, 1678 eine 7. und 1685 eine 8. Auflage (Mitteilung von Herrn Karl Grimmeißen), ferner Epitomy being the application of the doctrine on triangles 1636.

1) Oughtred war in Eton geboren, studierte in Cambridge und war namentlich mit Wallis sehr befreundet. — 2) Also nicht cos. und cot., wie Rouse Ball in „A short account of the history of mathematics“, London 1893, 8°, p. 246 angibt; hierüber auch Cantor III, 2, 559. — 3) Trigonometria, p. 17.

ständigen Beweis erbringt, den er mit der Orthogonalprojektion des Analemmas völlig geometrisch, wenn auch sehr schwerfällig durchführt.[1]) Oughtreds Werk sind Tafeln beigegeben, welche die Sinus, Tangenten und Sekanten auf sieben und ihre Logarithmen auf 6 Stellen geben und zwar für alle Minuten des in 100 Teile geteilten Grades.

Weitaus das vollständigste Werk über Trigonometrie, welches in jener Zeit erschien, ist die „Trigonometria Britannica, or the doctrine of triangles in two books", London 1658 in 2^0 von John Newton. Es ist dies eine Neuausgabe des gleichlautenden Werkes von Briggs und Gellibrand, jedoch wesentlich verbessert und vervollständigt. Letzteres gilt namentlich inbezug auf die Beweise, die teils mit dem Analemma, teils aber, und hierin liegt der Hauptfortschritt, auf mehr analytischem Wege (wenn auch noch etwas umständlich) geführt sind, als in irgend welchem vorhergehenden Werke[2]). Auch finden wir hier zum erstenmal die Bezeichnungen cosinus und cotangens konsequent benützt. Dem Werke ist eine achtstellige logarithmisch-trigonometrische Tafel angehängt, welche die centesimale Einteilung der Winkelgrade besitzt, sie ist die erste, deren Anordnung genau der noch heute bei siebenstelligen Tafeln gebrauchten entspricht[3]), nur sind statt der Differenzen die Logarithmen derselben angegeben. Außerdem enthält das Werk auch eine achtstellige Logarithmentafel der Briggsschen Logarithmen für die Zahlen von 1 bis 100000, ebenfalls angeordnet wie die heute gebräuchlichen.

Eine Antilogarithmentafel haben die Engländer John Pell (1610—1685) und Walter Warner zwischen 1630 und 1640 berechnet, die erste dieser Art seit Bürgi, doch ist dieselbe später wieder verloren gegangen. Außerdem hat Pell nach F. van Schootens Angabe zuerst die Formel für die Tangente des doppelten Winkels in der Gestalt $(r^2 - \mathrm{tg}^2\,\alpha) : 2r^2 = \mathrm{tg}\,\alpha : \mathrm{tg}\,2\alpha$ mitgeteilt[4])

---

1) Er sagt, daß er diesen Beweis auf Veranlassung von Carl Cavendish 1632 erdacht habe. In der Tat lassen sich alle Glieder der Analogieen direkt in der Figur deuten. — 2) So sind auch die Neperschen Analogieen hier mit analytischen Umformungen aus dem Neperschen Satze $\mathrm{tg}\,\frac{c+a}{2} \cdot \mathrm{tg}\,\frac{c-a}{2} = \mathrm{tg}\,\frac{b}{2} \cdot \mathrm{tg}\,\frac{b_1}{2}$ (siehe S. 16) gewonnen, allerdings noch sehr umständlich. — 3) Glaisher a. a. O. 118. — 4) Fr. v, Schooten, Tractatus de concinnandis demonstrationibus geometricis ex calculo Algebraico in lucem editus à Petro Schooten Francisci Fratre, Amst. 1661 in 4^0, 368. Schooten beweist daselbst die Formel mit der Descartesschen Koordinatengeometrie. Desgleichen gibt er hier mehrere Anwendungen dieser Methode auf Höhen- und Distanzmessungen und beweist damit den Satz des Menelaus.

und dieselbe in seiner Streitschrift[1]) gegen Longomontans Kreisquadratur ingeniös angewendet.

Auch die erstmalige Einführung eines Hilfswinkels zur Erleichterung logarithmischer Rechnungen datiert aus jener Zeit. Thomas Street (1626—1696), damals noch Student in London, später Astronom, behandelt nämlich in seiner „Astronomia Carolina, a new Theorie of celestial motion“, 1661[2]) die Aufgabe, aus den bekannten Logarithmen zweier Seiten eines Dreiecks und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel die übrigen Winkel zu bestimmen, nach einer von seinem Freunde Robert Anderson herrührenden Methode[3]) folgendermaßen. Ist $c = AB$ die kleinere der im Dreieck ABC gegebenen Seiten b und c, so berechnet man aus $c : b = 1 : \operatorname{tg} \varphi$ den Hilfswinkel φ und dann aus $\operatorname{tg} 45^0 : \operatorname{tg}(\varphi - 45^0) = \operatorname{tg}\frac{\beta + \gamma}{2} : \operatorname{tg}\frac{\beta - \gamma}{2}$ die Differenz der gesuchten Winkel β und γ; da ihre Summe aus der Kenntnis von $\sphericalangle\, \alpha$ folgt, so sind hiermit β ung γ gegeben und zwar, wie die Gleichungen zeigen, direkt aus den Logarithmen der Seiten b und c bestimmbar. Man erkennt sofort, daß die beiden Gleichungen nach Elimination des Winkels φ auf den bekannten Tangentensatz führen, Anderson und Streete beweisen die Richtigkeit ihrer Gleichungen durch eine ziemlich komplizierte geometrische Konstruktion.[4]) Diese für logarithmische Rechnung praktische Methode fand sofort, wenigstens in England, Anklang und erhielt sich von da ab in den Schriften über Trigonometrie. So findet sie sich bei dem

1) Controversy with Longomontanus concerning the quadrature of the circle, 4°, Amst. 1646, lateinisch 1647. — 2) Das Werk erschien wieder in lateinischer Übersetzung von Doppelmayr, Nürnberg 1705 in 4° und vermehrt von Halley, London 1710. — 3) Astronomia Carol. 41 der lateinischen Ausgabe. — 4) Dieser Beweis ist folgender: Es sei in Fig. 7 $AB = c = AD = AE$, $AC = b$, dann ist $CD = b + c = CK$ $(CK \perp CD)$; ferner sei $AE = AH = HG = GE = c$ $(AH \perp AC)$ und endlich $CL \perp BD$, das Übrige ist aus der Fig. ersichtlich, dann ist $\sphericalangle\, FAH = \varphi$ der Hilfswinkel und man hat unmittelbar $\operatorname{tg}\varphi = \frac{FH}{AH} = b : c$ (Radius = 1); also ist $\sphericalangle\, FAG = \varphi - 45^0$; da aber $\triangle\, AHD \sim \triangle\, KFH$ und $HD = EH$ ist, so folgt $AH : EH = HF : HK$ und hieraus $\triangle\, FAH \sim \triangle\, KEH$, somit $\sphericalangle\, FAG = \sphericalangle\, KEI = \sphericalangle\, CKE = \varphi - 45^0$. Ferner ist $\operatorname{tg} \sphericalangle\, CKE = CE : CK = (b - c) : (b + c) = \operatorname{tg}\frac{\beta - \gamma}{2} : \operatorname{tg}\frac{\beta + \gamma}{2} = \operatorname{tg}(\varphi - 45^0)$, womit die Richtigkeit der beiden Gleichungen nachgewiesen ist.

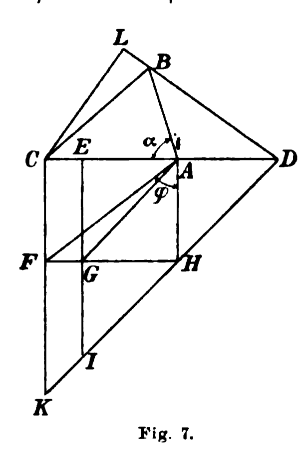


Fig. 7.

Astronomen Vincentius Wing[1] (1619—1668), der im zweiten Traktate seiner „Astronomia Britannica“, London 1668 und 1696 in 2⁰ eine vollständige Entwickelung der trigonometrischen Lehren gibt, und wurde von Thomas Simpson (1710—1761) in seiner „Trigonometry plane and spherical“ 1748, auf die wir noch später zurückkommen werden, abermals vorgetragen und mit einem etwas eleganteren Beweise versehen.[2] Auch Whiston berechnet in seinen „Praelectiones astronomicae“, Cantabr. 1707, zwei Beispiele auf diesem Wege, und der Franzose Le Monnier teilt die Methode in seinen „Institutions astronomiques“, Paris 1746 ebenfalls mit.[3] Auch Kästner[4]) kommt 1790 wieder auf sie zurück, und Pfleiderer gibt einen in der „Astronomie“ von Lalande enthaltenen Beweis des Verfahrens wieder[5]), wobei er noch mehrere Literaturnachweise anführt.[6]) Wings oben erwähnte Trigonometrie ist sehr vollständig und klar geschrieben und beruht hauptsächlich auf dem Werke von Norwood, sowie auf Charles Scarboroughs (1616—1696?) „A treatise upon trigonometry“, dessen Verfasser er „peritissimum atque de scientiis meritissimum Analystam“ nennt. Ähnlich wie bei Oughtred werden auch hier abkürzende Bezeichnungen: s. = Sinus, cs. = Co—sinus, t. = Tangens, ct. = Co—tangens, sec. = Secans, csec. = Co—secans für die trigonometrischen Linien gebraucht und Formeln in Proportionsform geschrieben; so steht z. B. der Tangentensatz p. 22 in der Form:

$$AC + AB : AC - AB :: \text{t.} \frac{C+B}{2} : \text{t.} \frac{C-B}{2}.$$

Die ähnlichen Abkürzungen: S., T., Cos., Cot. werden auch in dem Werke „A mathematical compendium“ von dem Astronomen Jonas Moore (1617—1679), in London 1674 in 12⁰ erschienen, konsequent verwendet. Die in diesem Buche enthaltenen Tafeln der Logarithmen der Sinus und Tangenten sind sechsstellig und geben die Charakteristiken bereits um 10 vermehrt an, wie es heute gebräuchlich ist. In seinem 1681 erschienenen „New system of the Mathematics“ gibt er außerdem eine Sinusversustafel und eine Tafel ihrer Logarithmen

1) A. a. O. p. 23. Vgl. auch Delambre H. A. mod. II, 520, der eine analytische Ableitung gibt. — 2) Cantor III, 2, 514—515, der Simpson die Erfindung der Methode im Abendlande zuschreibt. — 3) Pfleiderer, Ebene Trig., 1802, p. 369. — 4) Kästner, Geometrische Abhandl., 1. Sammlung, Göttingen 1790, 153. — 5) La Lande, 2. Ed. Paris 1771, III, 676, 3. Ed. III, 545. Pfleiderer 184. — 6) La Caille, Lectiones elementares mathematicae in Latinum traductae et ad editionem Parisianam anno 1759 denuo exactae, Vienne 1762, 177. — Playfair, Elements of geometry etc., Edinburgh 1795, 289 und 292; Cagnoli, Traité de Trigonometrie, Paris 1808 in 4⁰, 117 etc.

für alle Minuten des Quadranten auf 7 Stellen, nach De Morgan[1]) die ersten Tafeln dieser Art in England.

Ein Schriftsteller, der sich nicht eigentlich mit Trigonometrie beschäftigte, aber dennoch bei gelegentlicher Verwendung trigonometrischer Formeln zu einer Vervollkommnung ihrer Schreibweise beitrug, war der uns schon bekannte John Wallis. Im Anhange zu einem weiter unten zu besprechenden Traktat über die Winkelschnitte[2]) gab er nämlich eine komplette Zusammenstellung der goniometrischen Formeln, welche den Zusammenhang der trigonometrischen Linien darstellen, in einer abgekürzten Schreibart, die er in allen seinen Schriften konsequent beibehielt. Für sinus schrieb er S, für cosinus Σ, für tangens T, für cotangens τ, für secans s, für cosecans σ, für sinusversus V und für sinusversus complementi v und konnte so die Formeln in Gestalt von Gleichungen mitteilen. So war z. B. nach seiner Bezeichnungsweise:

$$S = \sqrt{:R^2 - \Sigma^2} = \frac{\Sigma T}{R} = \frac{T}{R}\sqrt{:R^2 - S^2} = \frac{TR}{s} = \frac{TR}{\sqrt{:R^2 + T^2}} = \frac{R}{s}\sqrt{:s^2 - R^2}$$
$$= \frac{\Sigma R}{\tau} = \frac{R}{\tau}\sqrt{:R^2 - S^2} = \frac{R^2}{\sigma} = \frac{R^2}{\sqrt{:R^2 + \tau^2}} = R - v = \sqrt{:2VR - V^2};$$

ferner sind die Fundamentalgleichungen der goniometrischen Linien:

$$T\tau = s\Sigma = S\sigma = R^2 = s^2 - T^2 = \sigma^2 - \tau^2 = S^2 + \Sigma^2.$$

Bei diesen Formeln, die allerdings erst 1685 erschienen, aber nach Wallis' Angabe schon viele Jahre früher auf eine Aufforderung von Collins hin von ihm zusammengestellt wurden, scheint uns namentlich die endgültige Ersetzung der Proportionen durch Gleichungen bemerkenswert, ein Schritt, den selbst Oughtred noch nicht gethan hatte.

Der Bezeichnungsweise von Wallis bediente sich auch ein gewisser John Caswell, über dessen Persönlichkeit uns jede nähere Notiz fehlt. Er schrieb eine „Trigonometria plana et sphaerica“, welche dem zweiten Bande von Wallis' Werken angehängt ist und wenig vor 1685 verfaßt zu sein scheint.[3]) Diese Schrift ist nach mehreren Richtungen hin bemerkenswert. Einmal gestattete ihm die konsequente Beibehaltung von Oughtreds und Wallis' Schreibweise, die langatmigen Sätze durch Formeln zu ersetzen, die einen ganz guten Überblick bieten, und dann zeichnet sich die Abhandlung durch klare und übersichtliche Darstellung des Stoffes, wie durch originelle Beweismethoden aus. Wir heben aus ihr folgendes hervor.

---

1) Glaisher a. a. O. 117. — 2) Opera Joh. Wallis, Oxoniae II, 1693, 591—592. — 3) Sie ist nämlich schon in der 1685 erschienenen Ausgabe von Wallis' Algebra abgedruckt.

Die ebene Trigonometrie des schiefwinkligen Dreiecks wird auf drei Axiome, den Sinussatz, den Tangentensatz und den Cosinussatz gegründet, welche alle drei geometrisch bewiesen werden; für den letzteren aber werden verschiedene Formeln angegeben und aus ihm durch Einführung des halben an Stelle des ganzen Winkels die vier logarithmierbaren Formeln des sogenannten Halbwinkelsatzes, d. h. die Formeln für $\cos\frac{C}{2}$, $\sin\frac{C}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{C}{2}$ und $\operatorname{ctg}\frac{C}{2}$ rechnerisch abgeleitet.

In der sphärischen Trigonometrie bietet ebenfalls der Cosinussatz mit seinen Folgerungen das Hauptinteresse, und zwar ist seine Ableitung eine originelle zu nennen. Caswell klappt nämlich (Fig. 8) die eine Ebene des zum sphärischen Dreieck gehörigen Dreikantes $MABC$ um MC um[1]), so daß arc. CB in die Ebene MCA zu liegen kommt, und macht arc CB' = arc CB. Fällt dann der Fußpunkt der von der Ecke B auf $B'F$ gefällten Senkrechten nach β, und jener der Senkrechten von B auf AC nach b und ist $B'l \perp AM$, $AE \perp MC$, $\beta\gamma \parallel MA$, so folgt, wenn man die Seiten des Dreiecks, wie gewöhnlich, mit a, b, c bezeichnet, direkt aus der Figur:

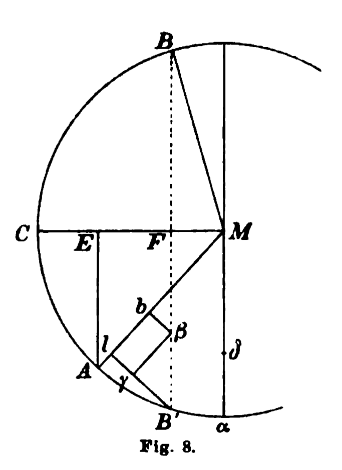


Fig. 8.

$bl = bA - Al =$ sinvers c — sinvers $(a - b)$; ist ferner δ der Fußpunkt der Senkrechten von B auf $M\alpha$, so hat man $B'F : \alpha M = B'\beta : \alpha\delta$, und da $\triangle AEM \sim \triangle \beta\gamma B'$ ist, $AE : AM = bl : \beta B'$. Durch Multiplikation dieser beiden Gleichungen ergibt sich: $AE \cdot B'F : 1 = bl : \alpha\delta$.

Beachtet man nun, daß $AE = \sin b$, $B'F = \sin a$ und $\alpha\delta =$ sinvers C ist, so erhält man die Gleichung:

$$(\sin a \cdot \sin b) : 1 = [\text{sinvers}\, c - \text{sinvers}\,(a - b)] : \text{sinvers}\, C.$$

Diese Formel wird nun auf rechnerischem Wege in neun verschiedene Gestalten umgegossen, unter denen sich auch die vier Halbwinkelformeln befinden, von denen wir eine mitteilen wollen, um die Schreibweise erkennen zu lassen:

$$S,\zeta \times S : \zeta - B \cdot S : \zeta - m : \times S : \zeta - n :: Rq \cdot Tq\tfrac{1}{2}\,\text{Ang}.$$

Es bedeutet hier B die Seite c, m, n die Schenkel a und b des

1) Es dürfte hier zum erstenmal der Versuch gemacht sein, mit den Methoden der darstellenden Geometrie trigonometrische Formeln abzuleiten. —

Winkels C, $\zeta = \frac{a+b+c}{2}$[1]), Rq = Quadrat des Radius, Tq = Quadrat der Tangente, so daß also in unserer Schreibweise für R = 1 die Formel lauten würde:

$$[\sin \zeta \cdot \sin(\zeta - c)] : [\sin(\zeta - a) \cdot \sin(\zeta - b)] = 1 : \mathrm{tg}^2 \frac{C}{2}.$$

Bemerkenswert ist noch die Formel, welche er für den Inhalt des sphärischen Dreiecks angibt; er setzt nämlich den Überschuß der Winkelsumme des Dreiecks über 180°, also den sphärischen Exzeß = E, bezeichnet die Peripherie eines größten Kreises der Kugel mit „π", den Inhalt des Dreiecks mit $\triangle$ und die Kugeloberfläche mit G, dann hat er[2]) ganz richtig:

$$2\pi\triangle = EG = 2R\pi E \text{ und } \triangle = RE.$$

Eine Hauptschwierigkeit bot damals noch immer die Ableitung der Neperschen Analogieen, weil man sich bemühte, dieselben geometrisch zu beweisen; auch Caswell, der sich sonst gern analytischer Entwickelungen bedient, quält sich mit einem geometrischen Nachweis ab und erhält denselben, indem er die stereographische und die orthogonale Projektion miteinander verbindet; daß dies keine übersichtliche Ableitung geben konnte, ist klar, aber dennoch muß man seine geometrische Geschicklichkeit bewundern.

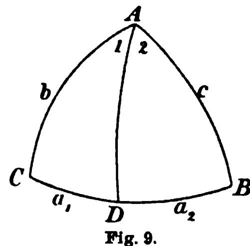


Fig. 9.

Am Schlusse seiner Trigonometrie teilt Caswell noch einige Formeln und Sätze aus den hinterlassenen Papieren des Thomas Baker[3]) (1625—1690) mit. Wir bemerken darunter die Formeln (Fig. 9.):

$$\sin(b+c) : \sin(b-c) = \mathrm{ctg}\,\frac{A_1 + A_2}{2} : \mathrm{tg}\,\frac{A_1 - A_2}{2},$$

$$\mathrm{tg}\,\frac{b+c}{2} : \mathrm{tg}\,\frac{b-c}{2} = \mathrm{tg}\,\frac{B+C}{2} : \mathrm{tg}\,\frac{B-C}{2},$$

$$\mathrm{ctg}\,\frac{A_1 + A_2}{2} : \mathrm{tg}\,\frac{B+C}{2} = \mathrm{tg}\,\frac{B-C}{2} : \mathrm{tg}\,\frac{A_1 - A_2}{2},$$

$$\mathrm{tg}\,\frac{a_1 + a_2}{2} : \mathrm{tg}\,\frac{b+c}{2} = \mathrm{tg}\,\frac{b-c}{2} : \mathrm{tg}\,\frac{a_1 - a_2}{2}.$$

Diese vier Propositionen werden auf analytischem Wege aus den bekannten Gleichungen für die beiden rechtwinkligen Dreiecke abgeleitet und aus ihnen dann ebenso die Neperschen Analogieen gefunden.

1) Hier tritt zum erstenmal eine eigene Bezeichnung für die halbe Seitensumme auf. Opera J. Wallis 875, Koroll. VI. — 2) Ebenda 875. — 3) Baker war Pfarrer zu Bishop-Nymmet in Devonshire und ist durch eine konstruktive Lösung höherer Gleichungen bekannt.

Wir sehen aus den hier angeführten Dingen, daß in England gegen Ende des 17. Jahrhunderts die trigonometrischen Kenntnisse, sowie namentlich die Formelschreibung bedeutende Fortschritte gemacht hatten.

Wenden wir dagegen unsere Blicke von den britischen Inseln zum Festland zurück, so erkennen wir zunächst, daß die Weiterentwicklung unserer Wissenschaft in Deutschland viel langsamer von statten ging, als es kurz nach Erfindung der Logarithmen der Fall war. Johann Heinrich Altsteds[1]) (1588—1638) „Encyclopaedia" von 1630, die in pars I eine Trigonometrie enthält, verwendet wohl die Logarithmen, schließt sich aber in der Hauptsache noch immer an Pitiscus an, Jakob Hainleins (1588—1662)[2]) „Synopsis mathematica", Tubingae 1653 und 1679 (3. Auflage) steht auf demselben Niveau und teilt die längst bekannten Sätze nur beweislos mit, Abdias Treu (Trew) (1597—1669), der 1637 Schwenter an der Universität Altorf nachfolgte, schrieb in seiner „Summa geometriae practicae" 1663, Nürnberg, 8°[3]) nur für Feldmesser und übertraf darin weder Faulhaber noch dessen Vorgänger, und Georg Friedrich Meyers „Doctrina triangulorum sive Trigonometria", Basel 1678 ist ebenfalls nur für Geodäten bestimmt und enthält nicht einmal Logarithmen.[4]) Bemerkenswert ist vielleicht nur, daß p. 138 die sogenannte Hansensche Aufgabe, die wir zum erstenmal bei Snellius fanden, behandelt ist.

Treus Nachfolger in Altorf war Johann Christoph Sturm (1635—1703), der sich hauptsächlich durch eine Übersetzung der Werke des Archimed verdient machte.[5]) Er schrieb eine „Mathesis enucleata" in 8°, die 1689, 1695 und noch 1711 erschien. Darin sind an verschiedenen Stellen die hauptsächlichsten Sätze der Trigonometrie enthalten, doch auch er erreicht, was Fülle des Stoffes und Darstellung desselben anlangt, die englischen Mathematiker seiner Zeit nicht.[6])

1) Vgl. über ihn Kästner, Geschichte, III, 434 ff. und Cantor II, 2, 719. — 2) Kästner III, 449 ff. — 3) Das Buch enthält Bernhard Cantzlers kurzen und leichten Bericht vom Feldmessen mit Erweiterungen von Treu. Es wurde 1718 wieder aufgelegt, Kästner III, 303. — 4) Meyer hat übrigens auch ein „Trigonometriae theoreticae et practicae compendium una cum tabulis", Basel 1676 und eine „Trigonometria cum tabulis sinuum", ebenda 1678, geschrieben, welche uns aber nicht zur Verfügung standen. — 5) Cantor III, 2, 11—12 und S. Günther, Die mathematischen und Naturwissenschaften an der nürnbergischen Universität Altorf, Mitteilungen des Vereins für Geschichte der Stadt Nürnberg, 3. Heft. — 6) Einen kurzen Abriß der Trigonometrie enthält auch seine „Mathesis juvenilis", Altorf 1699, 8°, t. I, 373—415. Im Anhang ein kleiner geschichtlicher Überblick über die Trigonometrie.

Viel wurde damals und noch im folgenden Jahrhundert eine Sammlung von Tafeln gebraucht, die Aegidius Strauch (1632—1682), Professor in Wittenberg, herausgab, da sie in einem mäßigen Duodezband in der Tat alles Nothwendige vereinigte. Dieselbe führt den Titel „Tabulae per universam mathesin summopere necessariae diu et vehementer desideratae". Witemb. 1662 und umschließt in der Einleitung eine Zusammenstellung der einfachsten trigonometrischen Regeln, dann eine Tafel der Sinus und Tangenten und ihrer Logarithmen für alle Winkelminuten auf 7 Stellen — die Komplementärfunktionen können ebenfalls direkt abgelesen werden — und außerdem eine Logarithmentafel der Zahlen und eine Sammlung astronomischer Tabellen. Fast genau ebenso eingerichtet, wie dieses Werk, ist die von Christian Grüneberger 1684 (und 1688) herausgegebene „Pandora mathematicarum tabularum ... quidem partim e Nepero, Longomontano, Keplero, Regiomontano, Ricciolo aliisque collectarum, partim propria Minerva elaboratarum..." Francofurti. 8°. Auch sie enthält in der Einleitung eine Trigonometrie, etwas vollständiger als die Strauchs, und die Tafeln der Funktionen und ihrer Logarithmen auf 7 Stellen.[1])

Ähnlich wie in Deutschland standen für die Trigonometrie die Verhältnisse im letzten Drittel des 17. Jahrhunderts in den übrigen Ländern des Kontinents: man faßte die bekannten Lehren mit größerer oder geringerer Vollständigkeit zusammen und suchte sie einem weiteren Leserkreise mundgerecht zu machen; dabei fanden aber die abkürzenden Bezeichnungsweisen und die Anfänge der Formelschreibung, denen wir in England wiederholt begegnet waren, wenig Beachtung und Verwendung.

Ein in jener Zeit vielgelesener Autor, der sich auch mit Trigonometrie beschäftigte, war der Jesuit Andreas Tacquet (1612—1660), in Antwerpen geboren und nachmals Lehrer der Mathematik an dem Kollegium seines Ordens zu Löwen. In seinen gesammelten Werken, die 1669 erschienen[2]) und 1707 noch einmal aufgelegt wurden, findet sich als Anhang zur Astronomie eine „Trigonometria sphaerica sive Analysis triangulorum sphaericorum", und in seiner „Geometria practica" Kap. II und III eine ebene Trigonometrie mit reichhaltigen Anwendungen auf alle möglichen Messungen, die Gradmessung mit eingeschlossen. Auch die Methode des Snellius zur Berechnung der Dreiecke ohne Tafeln wird hier sehr übersichtlich erörtert.

1) Außerdem veröffentlichte Grüneberger noch ein „Sceleton Arithmeticae vulgaris etc." Francf. a/O. 1688 in 8°, in welchem p. 99 die trigonometrischen Linien definiert werden. Daselbst finden sich neben den längst gebräuchlichen Namen wieder die Bezeichnungen Vietas: Prosinus und Transsinuosa erwähnt. — 2) Opera mathematica. 2 Voll. in 2°.

Tacquet kannte natürlich die Logarithmen, wenn er auch die ältere Methode der direkten Berechnung mit einer gewissen Vorliebe behandelte.

Ein umfassendes Sammelwerk ist des Franzosen Claudius Franciscus Milliet Dechales (1621—1678) „Cursus seu mundus mathematicus" in 3 Bänden, Lugduni 1674 in 2°; 1690 wieder aufgelegt und um einen Band vermehrt. Der erste Band enthält in seinem 4. Traktat eine Trigonometrie in 6 Büchern. Da der mundus mathematicus ein viel benutztes und weit berühmtes Lehrbuch war, so wollen wir seinen Inhalt kurz skizzieren, obwohl uns darin kaum etwas Neues begegnen wird. Das erste Buch der Trigonometrie gibt die Definitionen der trigonometrischen Linien und setzt ihren Zusammenhang auseinander. Die englische Bezeichnung der Komplementärfunktionen, wie Cosinus, Cotangens kommt dabei nicht vor, auch sind keine Abkürzungen zur Bezeichnung der Funktionen eingeführt. Die wenigen goniometrischen Formeln, welche zur Berechnung der Tafeln geometrisch abgeleitet werden, sind längst bekannt. Das zweite Buch handelt von den Logarithmen und ist in der zweiten Auflage vermehrt und verbessert. Es wird darin eine klare Darstellung der Entstehung der Logarithmen gegeben, indem die zwei Bewegungen, durch welche nach dem Vorgange Nepers die arithmetische Reihe der Exponenten und die geometrische der Potenzwerte erzeugt werden, auf zwei zu einander senkrechten Axen vor sich gehend gedacht, und in je zwei entsprechenden Punkten der Abscissen- und Ordinatenaxe die Senkrechten errichtet werden; die Schnittpunkte derselben liefern als Bild für den Verlauf die logarithmische Linie. Diese Darstellung findet sich aber erst in der zweiten Auflage von 1690 (p. 444). Übrigens rührt die Idee zu dieser Kurve nach Angabe Huttons bereits von Edmund Gunter her.[1])

Das dritte Buch enthält die Trigonometrie des ebenen Dreiecks, bei welcher nur eine etwas andere Einführung von Hilfswinkeln zur Berechnung der Dreieckswinkel mittelst des Tangentensatzes bemerkenswert ist, als wir sie bei Thomas Streete kennen lernten. Dechales beweist nämlich (p. 524, 2. Aufl.) zunächst den Satz, daß wenn $\operatorname{tg}\varphi : \operatorname{tg}\psi = \sin\beta : \sin\gamma$ ist, die Proportion bestehen müsse: $\sin(\varphi+\psi) : \sin(\varphi-\psi) = \operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2} : \operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{2}$, dann setzt er im $\triangle ABC$ das Seitenverhältnis $b : c = \operatorname{tg}\varphi : \operatorname{tg}\psi = \sin\beta : \sin\gamma$, wählt $\measuredangle\,\varphi$ ganz beliebig und bestimmt hierzu logarithmisch $\measuredangle\,\psi$, sowie $\varphi+\psi$ und

1) Vgl. die schon oft benützte „Preface to the mathematical tables" von Charles Hutton LXXXIV abgedruckt in Maseres' „Scriptores logarithmici" I.

$\varphi - \psi$; der obige Satz gestattet dann $\frac{\beta - \gamma}{2}$ logarithmisch zu finden. Das vierte, fünfte und sechste Buch sind der Behandlung der sphärischen Dreiecke gewidmet, und zwar hat Dechales bei ihrer Herstellung sowohl Neper, wie auch ganz besonders Cavalieri ausgiebig benutzt, wobei uns nur das eine auffällt, daß die Neperschen Analogieen nicht verwendet werden; er konnte sie offenbar noch nicht so handhaben, daß sie ihm wirklichen Nutzen gewährten. — Die beigegebene trigonometrische Tafel gibt die Werte der Sinus, Tangenten und Sekanten und der Logarithmen der beiden ersten für alle Minuten der Winkel von 0° bis 90° auf 7 Stellen. Außerdem ist eine Tafel der Briggsschen Logarithmen der Zahlen von 1 bis 10000 vorhanden.

Ein ähnliches Sammelwerk, wie Herigones' und Dechales' Werke gab Jacques Ozanam (1640—1717), Lehrer der Mathematik erst in Lyon, dann in Paris, heraus; es war dies der 1693 erschienene „Cours de mathématique" Paris, 5 Voll. in 8°, welcher einem von ihm verfaßten „Dictionnaire mathématiques" ebenda 1691 in 4°, der wenig wert ist und namentlich für uns nichts Bemerkenswertes enthält, nachfolgte. Im zweiten Bande des „Cours" ist eine ausführliche, sehr verständlich geschriebene Trigonometrie enthalten, die manches aus Dechales entlehnt. Ein wesentlicher Fortschritt gegenüber dem letzteren besteht in seiner Methode der Berechnung trigonometrischer Tafeln, die in einer ausgiebigen Benutzung der Newtonschen Interpolationsmethode gipfelt. Wohl hatte Newton seine Ansicht, man könne, um eine krummlinig begrenzte Figur zu quadrieren, durch beliebig viele Punkte der begrenzenden Kurve eine Hilfskurve hindurchlegen, schon in einem Briefe an Oldenburg vom 24. Oktober 1676 ausgesprochen und in seinen „Prinzipien" 1687[1]) kurz ausgeführt; aber auf die Verwendbarkeit dieser Methode zur Berechnung von Tabellen wies er ausdrücklich erst in seiner 1711 von William Jones herausgegebenen Methodus differentialis hin[2]), woselbst er auch seinen Gedanken näher entwickelte und zwar auf geometrischem Wege. Wir glauben daher, daß Ozanam bei der ganz algebraischen Durchbildung seiner Methode mehr von Briggs' uns schon bekanntem Verfahren beeinflußt war, dessen sich inzwischen Gabriel Mouton (1618—1694) in vereinfachter Form 1670 wieder bedient hatte.[3]) Dennoch unterscheidet sie sich von letzterem wesentlich, indem sie die Inter-

1) Philosophiae naturalis principia. London 1687, 4°, lib. III, Lemma V, p. 481. — 2) Opera Newtoni. Ed. Horsley I, 527. „Utiles sunt hae propositiones ad tabulas construendas per interpolationem serierum." — 3) Mouton hat sein Verfahren zuerst angewendet in „Observationes diametrorum solis et lunae."

polationswerte, wie es bei Newton geschieht, aus den Anfangsgliedern der Differenzreihen berechnen lehrt. Wie man aus den von Ozanam angegebenen Tabellen ersieht, ist seine Methode durch die allgemeine Formel

$$y = a + xb - \frac{x(x-1)}{2}c - \frac{x(x-1)(x-2)}{6}d$$

darstellbar, wobei die von ihm gebrauchten Buchstaben a, b, $-c$ und $-d$ die Anfangsglieder der Reihen bis zur dritten Differenzreihe einschließlich darstellen. Zur Bestimmung dieser Größen sind die Zahlenwerte der für $x = 0$, $x = 5$, $x = 10$, $x = 15$ aus der obigen Formel resultierenden Werte von y angegeben, wodurch die Aufgabe auf die Lösung von vier linearen Gleichungen zurückgeführt ist. Die Formel selbst gibt übrigens Ozanam nicht an.

Außerdem bringt er im ersten Buche eine übersichtliche Zusammenfassung der für die Tafelberechnung wichtigsten goniometrischen Formeln; unter diesen findet sich auch jene (p. 58) für die Tangente des doppelten Winkels, welche wir zuerst bei John Pell antrafen. Übrigens sind die angehängten 7stelligen Tafeln direkt aus denen Vlacks entnommen.[1])

Die im zweiten Buche auseinandergesetzten Methoden zur Berechnung ebener Dreiecke sind die bekannten; man mag höchstens bemerken, daß die von Tycho Brahe und Vieta zuerst gegebene Formel $\operatorname{tg} C = \frac{c \sin B}{a - c \cos B}$ (1. Tl. S. 178 und 201), nachdem sie fast in Vergessenheit geraten war, wieder verwendet wird, und daß Ozanam den Cosinussatz der ebenen Trigonometrie in der heute gebräuchlichen Form ausspricht. Die Behandlung der sphärischen Trigonometrie unterscheidet sich nur wenig von jener Dechales'; auch Ozanam hat die Neperschen Analogieen nicht und bevorzugt die Methode der Zerspaltung schiefwinkliger Dreiecke in zwei rechtwinklige vor jener der direkten Berechnung. Bemerkenswert scheint uns die Behandlung der Aufgabe, aus den Winkeln eines sphärischen

---

Lugd. 1670, 4° und damit die Logarithmen der Sinus und Tangenten auf 10 Dezimalen berechnet. Das diese Tafeln enthaltende Manuskript reichte er der Pariser Akademie ein; später (1770) benutzte Pezenas seine Zahlen, die er der Neuausgabe der Tafeln von Gardiner, auf 7 Stellen gekürzt, zugrunde legte. Auf seine Interpolationsmethode begründete Prony die immensen Rechnungen zur Herstellung der „Grandes tables de Cadastre“ (siehe weiter unten). Am besten auseinandergesetzt und begründet wurde sein Verfahren von Fréd. Maurice in Connaissance de temps pour 1847, herausgegeben 1844, 198—207. — Vgl. auch Wolf, H. A. I, 96 und Delambre, Hist. del' Astronomie mod. II, 355—407, sowie dieses Werk S. 28.

1) Glaisher a. a. O. p. 119.

Dreiecks seine Seiten zu finden, obwohl auch hier nur die analytische Art der Fassung neu ist. Von dem seit Regiomontan (I. Tl. S. 128) bekannten Satze ausgehend, daß in Fig. 9 auf S. 48 $\cos B : \cos C = \sin A_1 : \sin A_2$ ist, folgert Ozanam die Proportion:

$$(\cos B + \cos C) : (\cos B - \cos C) = \operatorname{tg} \frac{A}{2} : \operatorname{tg} \frac{A_1 - A_2}{2},$$

aus welcher sich $\frac{A_1 - A_2}{2}$ ergibt, da ferner $\frac{A_1 + A_2}{2} = \frac{A}{2}$ bekannt ist, so sind die Winkel A_1 und A_2 bekannt und die Seiten b und c ergeben sich dann aus den rechtwinkligen Dreiecken ACD und ABD. Er bemerkt jedoch, daß man die Aufgabe auch mit dem Supplementardreieck auf die bereits bekannte, den Winkel aus den drei Seiten zu berechnen, zurückführen kann.

Außer dem „Cours de mathématique“ hat Ozanam noch eine „Trigonométrie nouvelle“, Paris 1697 herausgegeben, die nur für Feldmesser bestimmt war und keineswegs etwas Neues enthält.

Wir können diesen Paragraphen damit schließen, daß wir auf die Neubehandlung jener Aufgabe hinweisen, der wir schon bei Snellius begegneten (I. Tl. S. 245) und die unter der Bezeichnung des „Rückwärtseinschneidens“ bekannt ist. Eine Lösung derselben wurde von Wilhelm Schickard 1624[1]), eine weitere von John Collins 1671 mitgeteilt[2]), der anführt, das Problem sei von Richard Townley gestellt worden, also offenbar die Behandlung durch Snellius und Schickard nicht kennt, und das gleiche wollen wir von Laurent Pothenot annehmen, der der Pariser Akademie 1692 eine Lösung vorlegte, die aber erst 1730 gedruckt wurde. Merkwürdigerweise hat es von diesem Mathematiker den Namen Pothenotsche Aufgabe erhalten.

§ 2. Winkelschnitte und Kreismessung.

Der letzte von uns genannte Schriftsteller, welcher sich nach Vieta und Bürgi mit dem Teilungsproblem der trigonometrischen Funktionen oder, wie man damals sagte, mit den Winkelschnitten beschäftige, war Briggs gewesen, ohne daß er jedoch die bereits vorhandenen theoretischen Kenntnisse hierüber erweiterte. Das gleiche gilt von dem uns schon bekannten Oughtred, welcher mit einem von Vietas geometrischer Methode wenig verschiedenen Verfahren Beziehungen zwischen der Sehne eines vielfachen Winkels und den Potenzen der Sehnen oder Supplementarsehnen des einfachen Winkels

1) Cantor II, 2, 705. — 2) Philosophical Transactions 1671, Nr. 69, p. 209; wir zitieren zukünftig P. T. — Wir bemerken, daß die Lösung von Snellius von diesen beiden nicht übertroffen wird.

in großer Zahl herstellte. Untersucht man die von ihm gewonnenen Resultate, welche er schon vor dem Jahre 1648 erhalten hatte[1]), genau, so erkennt man, daß sie sich von Vietas Sätzen nur durch die Schreibweise unterscheiden, in welcher sich allerdings ein Fortschritt kund gibt; so schreibt er z. B., den Quotienten $\frac{Z}{N}$ mit $N)Z$ bezeichnend: $R^5)\,\alpha^5 A - 4R^2\alpha^3 A + 3R^4\alpha A = F$, das heißt, da mit $A, B, \cdots F$ die Sehnen, mit $\alpha, \beta, \cdots \zeta$ die Supplementarsehnen des einfachen, doppelten $\cdots$ sechsfachen Winkels bezeichnet werden, $\sin 6\alpha = \sin\alpha\,(2^5\cos^5\alpha - 4\cdot 2^3\cos^3\alpha + 3\cdot 2\cos\alpha)$ (für $R = 1$). Ohne Zweifel kannte aber Oughtred Vietas Arbeiten über die Winkelschnitte, denn diese waren ja, wie wir uns erinnern, erst 1615 durch Anderson veröffentlicht worden und mußten daher direkt die späteren Arbeiten beeinflussen. Bekannter als Oughtreds Buch ist aber jedenfalls John Wallis' Untersuchung über die Winkelschnitte von 1685 geworden, da dessen Schriften damals große Verbreitung fanden. Wallis ist es mehr um die Lösung der Teilungsgleichungen zu thun, als seinem unmittelbaren Vorgänger, und in der Tat macht er hierbei auch einen bedeutenden Fortschritt, indem er nachweist, daß die Anzahl der Wurzeln einer solchen Gleichung mit ihrem Grade übereinstimmt.[2]) Indem er ferner bis zur Siebenteilung einschließlich fortschreitend die den einzelnen Wurzeln entsprechenden Bögen angibt, scheidet er auch die Anzahl der positiven und negativen Wurzeln richtig von einander. Als Anwendung seiner Lehre von den Winkelschnitten teilt er die Berechnung eines Kanons der Sehnen von $1\frac{1}{2}$ zu $1\frac{1}{2}$ Grad mit[3]) und weist darauf hin, daß zur Bildung eines solchen für alle Winkelminuten nur zwei Dreiteilungen und eine Fünfteilung nötig sind, sowie die Berechnung der Quadratwurzeln aus den Zahlen 2, 3 und 5. Bemerkt mag noch werden, daß er den Radius gleich 1 setzt und die Sehnen durch Wurzelgrößen ausdrückt.

Ähnliche Tabellen waren übrigens schon früher gegeben worden; so hatte schon Snellius gezeigt[4]), wie man die Sehnen der durch fortgesetzte Halbierung erhaltenen Bögen gesetzmäßig darstellen kann,

---

1) J. Wallis bemerkt in seinem „Tractatus de sectionibus angularibus", der zuerst 1685 englisch erschien (Opera Wallisii, Oxoniae in 2°, II, 1693, 575), „daß er Oughtreds Arbeiten, die erst 1677 unter dem Titel „Opuscula mathematica hactenus inedita" in 8° erschienen, schon gelesen hatte, als er 1648 seine eigenen Arbeiten über diesen Gegenstand begann. — 2) A. a. O. p. 554 heißt es: „Aequatio pertinens ad huiusmodi arcus angulive Multiplicationem aut Sectionem, tot habebit radices (affirmativas aut negativas) quot innuit Exponens istius Multiplicationis aut Sectionis." — 3) A. a. O. p. 586—589. — 4) Vgl. Snellius, Cyclometricus. 1621: prop. I und II und Montucla, Histoire des recherches sur la quadrature du cercle. Nouv. édit. Paris 1831, in 8°, p. 67—68.

und in den hinterlassenen Papieren Descartes' (1596—1650) fand sich eine ähnliche Untersuchung[1]), welche zum Zweck hatte, jene Winkel zu bestimmen, deren Sehnen sich geometrisch konstruieren lassen. Zu einem erschöpfenden Resultat war er jedoch hierbei nicht gelangt.

Was das Problem der Rektifikation und der Quadratur des Kreises anlangt, so hatte seine Behandlung durch die Berechnung der Zahl π von seiten der Niederländer Ludolph van Ceulen und Snellius keineswegs ihr Ende gefunden, sondern behauptete noch immer seine alte Anziehungskraft. Einerseits wurden, sozusagen bewußterweise, geometrische Näherungskonstruktionen angegeben, andererseits suchte man die Berechnung von π zu vereinfachen, und endlich gab es noch Gelehrte, welche noch immer nach einer exakten Quadratur suchten. Ohne uns auf Einzelnheiten näher einlassen zu können, wollen wir die hauptsächlichsten Arbeiten, die die Frage nach diesen drei Richtungen behandelten, anführen.

Eine sehr elegante geometrische Näherungskonstruktion gab der Jesuit Adam Adamandus Kochansky (1631—1700), Mathematiker des Königs von Polen, in den Acta Eruditorum 1685 (394—398).[2]) Näherungsweise Kreisteilungen, die auch hier einschlägig sind, wurden nach Albrecht Dürer und Clavius schon 1628 von Antoine de Ville und von Abraham Bosse 1665, der die des erstern verbesserte, gegeben; Carlo Renaldini (1615—1698) gab dieselbe Methode in seinem 1650 herausgegebenen „Opus mathematicum" wieder.[3]) Eine Rektifikation der Kreislinie hat auch Bartholomäus Sourvey (um 1577—1629), ein Schweizer, versucht[4]), indem er ähnliche Kurven, wie die Quadratrix des Dinostratus anwandte; viel scheint aber dabei nicht herausgekommen zu sein.

Weit wichtiger, wenigstens von theoretischem Standpunkte aus, als diese Versuche angenäherter Konstruktionen waren die Bestrebungen, die Methoden zur Berechnung von π zu verbessern, wie sie an Snellius' Arbeiten anknüpfend von Christian Huygens und James Gregory ausgingen. Huygens (1629—1695) schrieb bereits mit 22 Jahren „Theoremata de quadratura hyperboles, ellipsis et circuli, ex dato portionum gravitatis centro", Lug. Bat. 1651 in 4°[5]) und veröffentlichte 1654 ebenda seine berühmte Arbeit „De circuli magnitudine inventa", in 4°.[6]) In der ersten dieser Abhandlungen fand er

1) Descartes, Oeuvres, Ed. Cousin t. 11. — 2) Cantor teilt dieselbe mit III, 2, 23. — 3) Vgl, über diese Notizen Cantor III, 2, 23—24. — 4) Curvi ac recti proportio a Barth. Sovero Friburgensi. Patavii 1630, 4°. Kästner, Geschichte III, 62—66. — 5) Christiani Hugenii a Zulichem Opera varia. Lugd. Bat. 1724, 4°, I, 315 ff. — 6) Ebenda. 351 ff. Deutsch von F. Rudio in „Archi-

bereits auf eine sehr sinnreiche Weise aus dem Schwerpunkte eines Kreisabschnittes noch nähere Grenzen für den Umfang des Kreises als Snellius. In der zweiten aber bewies er die von Snellius gegebenen Sätze (I. Tl., S. 243—244) und verbesserte dessen Methode noch wesentlich, indem er durch scharfsinnige geometrische Betrachtungen folgende zwei Grenzen für den Bogen φ eines Segmentes bestimmte:

$$\varphi > \operatorname{crd}\varphi + \tfrac{1}{3}(\operatorname{crd}\varphi - \sin\varphi)$$

und

$$\varphi < \operatorname{crd}\varphi + \frac{4\operatorname{crd}\varphi + \sin\varphi}{2\operatorname{crd}\varphi + 3\sin\varphi}\cdot\frac{\operatorname{crd}\varphi - \sin\varphi}{3}.\text{[1]}$$

Setzt man zur Prüfung dieser Formeln für φ, $\operatorname{crd}\varphi$ und $\sin\varphi$ die Reihen ein, so findet man, daß die zweite Grenze dem Bogen sehr nahe kommt, indem sie erst im vierten Gliede der Reihe für φ von denselben um $\frac{1}{8200}\operatorname{crd}^7\varphi$ abweicht.[2]) Übrigens gibt Huygens im XX. Satz (p. 384) statt der unteren Grenze noch eine nähere an, die er aus den beiden eben angeführten ableitet.[3]) Sie stimmt mit der Reihe für φ in den drei ersten und fast noch im vierten Gliede überein. Außerdem hat Huygens in derselben Schrift auch eine Arcufication der Geraden vorgenommen, wobei er auf den Ausdruck $\varphi = \frac{1}{3}\left(8\operatorname{crd}\frac{\varphi}{2} - \operatorname{crd}\varphi\right)$ geführt wurde.[4]) Newton wies dann später, nachdem die Reihen erfunden waren nach, daß diese Formel eine Annäherung bis auf 5te Potenzen (excl.) der Reihe für $\operatorname{crd}\varphi$ gibt.[5]) Das Verhältnis des Umfangs zum Durchmesser hat Huygens aus diesen Formeln abgeleitet, indem er $\varphi = \frac{\pi}{30}$ setzte, wodurch er

---

medes, Huygens, Lambert, Legendre. Vier Abhandlungen über die Kreismessung." Leipzig 1892, 8°.

1) Diese Formeln geben den Wortlaut des Theor. XVI, Prop. XIX, p. 382 a. a. O. genau wieder. Vgl. auch Probl. IV, p. 384. — 2) Klügel, Mathematisches Wörterbuch, Leipzig 1803. I, 653—654; wir zitieren künftig nur Klügel. — 3) Dieselbe gibt $\varphi > \frac{10}{3}\frac{\operatorname{crd}^2\varphi - \sin^2\varphi}{\Sigma}$, wo $\Sigma = \frac{8}{9}\frac{(\operatorname{crd}\varphi - \sin\varphi)^2}{2\operatorname{crd}\varphi + 3\sin\varphi} + 2\operatorname{crd}\varphi + 3\sin\varphi$ ist. — 4) A. a. O. Prop. XII. Probl. III, p. 370. — 5) Commercium epistolicum Johannis Collins et aliorum de Analysi promota. Edit. J. B. Biot und F. Lefort, Paris 1856, Nr. L. 110. Opera Newtoni. Ed. Horsley. I, 323. Brief Newtons an Leibniz vom 13. Juni 1676. Daselbst teilte Newton noch die Näherungsformel $\varphi = \sin\varphi\,\frac{14 + \cos\varphi}{9 + 6\cos\varphi}$ mit, von welcher E. Lampe (Mathesis 2, S. VII, 9—10, 1897) nachwies, daß sie φ bis zu Winkeln von 45° höchstens mit einem Fehler von 19½″ gibt. — 1824 hat der im Text angeführten Gleichung von Huygens W. Voll (wie es scheint ohne Kenntnis von Newtons Arbeit) noch ein Glied beigefügt: „Versuch, die Länge eines Kreisbogens ohne Hilfe einer Sinus- oder Sehnentafel zu bestimmen", Berlin 1824.

3,1415926558 > π > 3,1415926533 fand; während man also[1]) bei der Benützung des 96-Ecks durch die Methode des Snellius nur die 6 ersten Dezimalen bekommt, erhielt Huygens vom 60-Eck ausgehend bereits 9 Dezimalen richtig.

Von einer andern Seite wandte sich James Gregory (1638—1675), dem wir noch wiederholt begegnen werden, dem Problem der Kreisquadratur in seiner Abhandlung „Vera circuli et hyperbolae quadratura", 1667 zu. Er machte nämlich zum erstenmal den Versuch, die Unmöglichkeit der Kreisquadratur zu beweisen.[2]) Daß ihm dies mit seinen Mitteln nicht gelingen konnte ist selbstverständlich, aber dennoch finden sich in dieser Arbeit so überraschend neue Gedanken über die Transszendenz eines doppelten konvergenten Prozesses, den er zur Darstellung der Kreisfläche ersann, daß sie selbst von Huygens, der übrigens eine exakte Quadratur auch nicht für möglich hielt, nicht verstanden wurden; dieser veröffentlichte daher eine Gegenschrift, worin er Gregorys Verfahren als unrichtig nachzuweisen suchte, worauf eine abermalige Entgegnung des letzteren erfolgte. Der ganze Streit, welcher zu keiner Einigung führte, ist in Huygens Varia opera II abgedruckt.

Aber im Gegensatze hierzu gab es in jener Zeit immer noch Gelehrte, welche eine exakte Lösung des Problemes anstrebten. Abgesehen von den Schriften des Belgiers Jean Storms (Sturmius) (1559—1650)[3]), des Dänen Longomontanus[4]) und des Engländers John Pell[5]), der letzteren angriff, erschien 1647 das voluminöse[6]) und auch in anderer Richtung wirklich bedeutende Werk[6]) des Gregorius von Sanct Vincent (1584—1667), eines belgischen Jesuiten und Schülers des Clavius. In diesem Werk gab er vier verschiedene Verfahrungsarten an, um die Quadratur des Kreises nach seiner Ansicht exakt zu erhalten. An das Erscheinen dieses Buches knüpfte sich ein lebhafter Streit, in den die bedeutendsten Männer jener Zeit eingriffen, während sich Gregorius selbst nie an ihm beteiligte. Wir gehen auf den Kampf, als dem Ziele unserer Schrift zu ferne liegend, nicht näher ein und verweisen zur näheren Orientierung hierüber auf

---

1) Siehe I. Tl., S. 244. — 2) Vgl. hierüber die Arbeit Gregorys selbst a. a. O. p. 412 ff., sowie die Darstellung der Hauptgedanken Gregorys bei G. Heinrich, Bibliotheca mathem. II, 1901, 77—85. — 3) De accurata circuli dimensione et quadratura, cum sylvula epigrammatum, aenigmatum etc. Löwen 1633, in 4°. Vgl. Quetelet, Hist. des sc. math. chez les Belges. p. 139. — 4) 1638 und 1644. Kästner, Geschichte III, 58, Cantor II, 2, 712. — 5) Controversy with Longomontanus concerning the quadrature of the circle, 1646 und lateinisch 1647. — 6) Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum coni, 1647, 2°.

Cantors Darstellung II, 2, 713—716. Desgleichen können wir auch die Darstellungen der Zahl π, wie sie von Wallis[1]) und Lord Brouncker (1620—1684)[2]) gegeben wurden, nur vorübergehend erwähnen. Der erstere fand durch ein eigentümliches Interpolationsverfahren (von Wallis rührt auch das Wort Interpolation her) für $\frac{4}{\pi}$, wofür er $\square$ schreibt, die bekannte Formel:[3])

$$\square = \frac{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 11 \cdots}{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 12 \cdots}.$$

Als er dann die Methode dem Lord Brouncker mitteilte, brachte dieser das Produkt auf die Form des Kettenbruches:

$$\square = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 + \cfrac{49}{2 + \cdots}}}}$$

Da er aber keine Ableitung desselben beifügte, gab Wallis eine solche[4]), die jedoch so kompliziert ist, daß sie kaum den Überlegungen entsprechen dürfte, durch die Brouncker auf seine Darstellung geführt wurde.

Wir sind durch unsere letzten Betrachtungen auf Reihen geführt worden, und in der Tat stand die damalige Zeit, wenn man sich so ausdrücken darf, im Zeichen der unendlichen Reihen. Da dieselben namentlich auf die Entwickelung der Zyklometrie einen wesentlichen Einfluß ausübten, so müssen wir auf ihre Erfindung, soweit es sich um trigonometrische und zyklometrische Reihen handelt, in einem eigenen Paragraphen näher eingehen.

§ 3. **Erfindung und erste Verwertung der trigonometrischen Reihen.**

Wie wir schon im vorigen Paragraphen sahen, hatte sich der englische Gelehrte James Gregory[5]) eines konvergenten unendlichen Prozesses bedient, um die Unmöglichkeit der Kreisquadratur nachzuweisen, und wie schon 100 Jahre früher Vieta, so hatte um dieselbe

1) Arithmetica infinitorum 1655. Opera J. Wallis. I, 467. Prop. CXCI und wieder II, 356. — 2) Mitgeteilt von Wallis, ebenda. Lord Brouncker war Kanzler und Großsiegelbewahrer König Karls II. und der erste Präsident der Royal Society, um deren Begründung er sich sehr verdient machte. — 3) Eine sehr übersichtliche Darstellung von Wallis' Methode hat Reiff gegeben: Geschichte der unendlichen Reihen, Tübingen 1889, 8°, 6—13. — 4) Wallis, Opera I, 469 ff. — 5) Gregory ist 1638 zu Aberdeen geboren und starb 1675, nachdem er zuerst zu St. Andrews, dann zu Edinburg Professor der Mathematik gewesen.

Zeit auch Wallis eine konvergente Faktorenreihe zur Berechnung der Zahl π angegeben. Das Problem der Kreisquadratur gab also den ersten Anstoß zur Bildung solcher unendlicher Prozesse, und ähnlich bot auch die Quadratur von Flächenräumen, welche von anderen krummlinigen Kurven begrenzt werden, die Veranlassung zur ersten Erfindung der unendlichen Potenzreihen. Nicolaus Mercator[1]) (Kaufmann), ein Deutscher, der 1620 in Holstein geboren wurde, aber den größten Teil seiner Lebenszeit in England zubrachte, wo er 1687 starb, suchte, nachdem schon Brouncker die gleichseitige Hyperbel quadriert hatte[2]), in seiner „Logarithmotechnia" 1668[3]) nach einem Ausdruck für die von der Hyperbel $y = \frac{1}{1+x}$, einer Asymptote und zwei Ordinaten eingeschlossene Fläche und gewann denselben, indem er auf den Gedanken kam, den Quotienten $\frac{1}{1+x}$ durch Division[4]) in eine Reihe zu entwickeln und das Integral der einzelnen Glieder derselben nach einer der damals bereits bekannten Methoden auszuwerten. Von Gregorius a St. Vincentio und anderen war gezeigt worden, daß die Flächenräume zwischen der Hyperbel und einer ihrer Asymptoten durch Logarithmen ausgedrückt werden können, so daß damit unmittelbar die Entwickelung $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$ gewonnen war.

Doch wenn auch die mathematische Welt durch Mercators Publikation mit dem enorm wichtigen Gedanken, der in der Bildung der Potenzreihen liegt, tatsächlich zuerst bekannt gemacht wurde, weshalb man ihm mit Recht die Erfindung der Potenzreihen zuschreibt, so hatte doch Isaak Newton diesen Gedanken schon mehrere Jahre früher gefaßt, ja sogar wesentlich weiter gefördert. Newton ward 1643 in Woolsthorpe in England geboren als ein ebenso schwächliches Kind wie der große Kepler, erreichte aber dennoch ein Alter von mehr als 84 Jahren, indem er 1727 starb. Von 1660 ab studierte er in Cambridge, woselbst der uns schon bekannte Isaac Barrow (1630—1677) auf seine mathematische Bildung einen großen Einfluß ausübte. Ihm folgte er 1669 im Lehramte zu Cambridge nach, wurde aber schon 1696 mit der Stellung eines Aufsehers der Münze betraut, wodurch seine Tätigkeit für die exakten Wissenschaften ein Ende

1) Mercator ist auch Verfasser einer Trigonometria sphaericorum logarithmica. Dantisci 1651 in 8°, die uns aber nicht näher bekannt ist. — 2) The Squaring of the Hyperbola bey an infinite series of rational Numbers. P. T. 13. April 1662. — 3) Abgedruckt bei Maseres, Scriptores logarithmici. I, 167 ff. — 4) Solche Divisionen hatte allerdings Wallis schon früher ausgeführt, die Erfindung lag also sozusagen in der Luft.

fand. Alle seine hervorragenden Erfolge, seine unvergleichlichen Entdeckungen fallen daher in die Zeit von 1666 bis 1696.

Aus einem Briefe Newtons an Heinrich Oldenburg (um 1615—1677), der damals Sekretär der Royal Society war, vom 24. Oktober 1676[1]) wissen wir nur, daß er sich schon vor 1666, in welchem Jahre er vor der Pest fliehend Cambridge verließ, mit unendlichen Reihen beschäftigte und damals bereits im Besitze der Binomialreihe war. Die in seinem Charakter begründete Scheu, seine Entdeckungen kund zu geben, scheint ihn jedoch an einer Veröffentlichung gehindert zu haben und erst 1669 legte er die später, teilweise 1704, ganz erst 1711 unter dem Titel „De analysi per aequationes numero terminorum infinitas" veröffentlichte Abhandlung Barrow vor, der sie im Juli desselben Jahres an John Collins (1625—1683) sandte, damit sie dieser dem Präsidenten der Royal Society Lord Brouncker mitteilen möge.[2]) Merkwürdigerweise hat keiner der beiden einflußreichen Männer auch nur einen Finger gerührt, die Epoche machende Arbeit den P. T. einzuverleiben, vielleicht da sie die Tragweite der Schrift unterschätzten.

Diese wichtige Abhandlung[3]) enthält nun die erstmalige Entwickelung der trigonometrischen und zyklometrischen Reihen, auf die Newton durch die Behandlung der Probleme der Quadratur und der Rektifikation verschiedener Kurven geführt ward. Seine Methode zur Auffindung der Quadraturen besteht einfach darin, den Ausdruck für die Ordinate y der Kurve in Funktion von x in eine unendliche Reihe zu entwickeln und diese dann gliederweise zu integrieren.

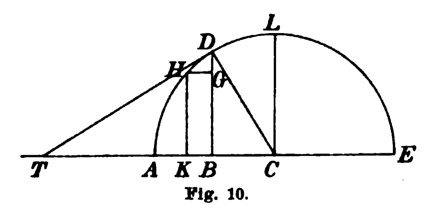


Fig. 10.

So erhält er für die Kreisfläche[4]), indem er $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ schreibt und $\sqrt{a^2 - x^2} = a - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7}$ etc. bildet, durch Integration die Fläche $CBDL$ (Fig. 10) $= ax - \frac{x^3}{6a} - \frac{x^5}{40a^3} - \frac{x^7}{112a^5} - \frac{5x^9}{1152a^7}$ etc. Die Rektifikation des Kreises[5]) aber wird auf folgende Weise vollzogen. Sei $AE = 1$, $AC = \frac{1}{2}$, $HGBK$ ein unendlich kleines Rechteck (rectan-

1) Dieser Brief, der zur Mitteilung an Leibniz bestimmt war, findet sich an mehreren Stellen abgedruckt, so bei Wallis, Opera III, 634 ff. und im Commercium epistolicum J. Collins etc. Londini 1722, No. LV—LXV und Ausgabe von Biot und Lefort 1856, 125. — 2) Commercium epist. Ed. Biot. 53—54. — 3) Dieselbe steht in Newtons Werken, Edit. Horsley I, 257 ff. und in der von Collins gleich nach ihrer Mitteilung genommenen Abschrift im Commercium No. II—XII. — 4) Commercium No. V. — 5) Ebenda No. X.

gulum indefinite parvum), dann ist BK oder GH das Moment der Basis $AB = x$ und HD das Moment des Bogens AD, und es besteht die Proportion $BK\ (= HG) : HD = BT : DT = BD\ (= \sqrt{x - x^2}) : DC\ (= \frac{1}{2}) = 1 : \frac{1}{2\sqrt{x - x^2}}$. Also ist HD, das Moment des Bogens $AD, = \frac{1}{2\sqrt{x - x^2}} = \frac{\sqrt{x - x^2}}{2x - x^2}\ (= \frac{dz}{dx}$ in unserer Schreibweise, wenn z den Bogen AD bezeichnet). Hieraus folgt durch Entwickelung in eine Reihe und Integration:

$$z = \text{arc. } AD = x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{6} x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{40} x^{\frac{5}{2}} + \frac{5}{112} x^{\frac{7}{2}} + \frac{35}{1152} x^{\frac{9}{2}} + \frac{63}{2816} x^{\frac{11}{2}} \text{ etc.}$$

Setzen wir, wie jetzt gebräuchlich, $x = \frac{1}{2} - \cos z = \text{sinvers } z - \frac{1}{2}$, so haben wir die Reihe:

$$\text{I) } \operatorname{arcsinvers}\left(x + \frac{1}{2}\right) = x^{\frac{1}{2}}\left\{1 + \frac{1}{6}x + \frac{3}{40}x^2 + \frac{5}{112}x^3 + \frac{35}{1152}x^4 + \frac{63}{2816}x^5 \cdots\right\}.$$

Indem Newton weiter $BC = x$ und den Radius $CA = 1$ setzt, erhält er für arc $LD = \arcsin x$ die Reihenentwickelung:

$$\text{II) } \quad z = \arcsin x = x + \frac{1}{6} x^3 + \frac{3}{40} x^5 + \frac{5}{112} x^7 + \frac{35}{1152} x^9 + \frac{63}{2816} x^{11} \text{ etc.}$$

Um hieraus die Reihe für $\sin x$ zu finden, kehrt er die obige Reihe um, indem er, wenn z. B. z bis zur 9. Potenz gewünscht wird, die Glieder vom elften Grade an vernachlässigt und dann aus der Gleichung

$$\frac{35}{1152} x^9 + \frac{5}{112} x^7 + \frac{3}{40} x^5 + \frac{1}{6} x^3 + x - z = 0,$$

wie er sich ausdrückt, die Wurzel zieht[1]). So erhält er:

$$\text{III) } \quad x = \sin z = z - \frac{1}{6} z^3 + \frac{1}{120} z^5 - \frac{1}{5040} z^7 + \frac{1}{362880} z^9 \text{ etc.}$$

Die Cosinusreihe gewinnt er hieraus, indem er

$$\text{IV) } \sqrt{1 - x^2} = \cos z = 1 - \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{24} z^4 - \frac{1}{720} z^6 + \frac{1}{40320} z^8 - \frac{1}{3628800} z^{10} \text{ etc.}$$

bildet. Überdies gibt er das Gesetz der Koeffizienten dieser sämtlichen Reihen, welches unschwer zu erkennen war, im 8. Kapitel eigens an. Newtons Methode ist nach zwei Seiten hin von Bedeutung: einmal erkennt man, daß ihm die Reihenentwicklung der Funktionen nicht Selbstzweck, sondern nur ein Mittel war, um Integrationen ausführen zu können, und dann tritt hier zum erstenmal die deutliche Erkenntnis des Zusammenhanges von Differentialquotient

1) Wie dies zu geschehen hat, gibt er im Vorhergehenden an.

und Integral auf, wenn er auch die später von ihm eingeführte Bezeichnung Fluxion und Fluente noch nicht gebraucht.

Collins, statt Newtons bahnbrechende Abhandlung zur Veröffentlichung zu bringen, teilte James Gregory, der sich, wie wir wissen, lebhaft mit der Kreisquadratur beschäftigte, zu Beginn des Jahres 1670 jene Reihe mit, die Newton für das Kreissegment erhalten hatte (S. 61). Gregory bemühte sich lange vergeblich, dieselbe abzuleiten, und als ihm dies endlich gelang, fand er auch die Reihe für arcsin x, die er Collins in einem Briefe vom 19. Dezember desselben Jahres mitteilte[1]) und in einem weiteren Briefe vom 24. desselben Monates[2]) die Reihen für $\sin z$ und $\cos z$ beifügte. Als ihn hierauf Collins noch mit einigen anderen Reihen aus Newtons Abhandlung bekannt gemacht hatte, sandte er diesem am 15. Februar 1671 wiederum mehrere Reihen[3]), die er inzwischen mit seiner Methode, welche er jedoch nirgends auseinandersetzte[4]), erhalten hatte. Ist r der Radius, a der Bogen, t die Tangente und s die Sekante (also Bezeichnungen, wie sie ähnlich schon Wallis und andere benützt hatten), so lauten diese:

$$\text{V)} \qquad a = t - \frac{t^3}{3r^2} + \frac{t^5}{5r^4} + \frac{t^7}{7r^6} + \frac{t^9}{9r^8} - \cdots,$$

$$\text{VI)} \qquad t = a + \frac{a^3}{3r^2} + \frac{2a^5}{15r^4} + \frac{17a^7}{315r^6} + \frac{62a^9}{2835r^8} + \cdots,$$

$$\text{VII)} \qquad s = r + \frac{a^2}{2r} + \frac{5a^4}{24r^3} + \frac{61a^6}{720r^5} + \frac{277a^8}{8064r^7} + \cdots$$

Damit waren also die Reihen für arctg, tg und sec gefunden: Indem er ferner $t = \log \operatorname{tg} x$ (Tangens arteficialis), $s = \log \sec x$ setzte und den ganzen Quadranten mit q und $2a - q$ mit e bezeichnete, ergaben sich ihm noch die Reihen:

$$\text{VIII)} \qquad s = \frac{a^2}{r} + \frac{a^4}{12r^3} + \frac{a^6}{45r^5} + \frac{17a^8}{2520r^7} + \frac{62a^{10}}{28350r^9} + \cdots,$$

$$\text{IX)} \qquad t = e + \frac{e^3}{6r^2} + \frac{e^5}{24r^4} + \frac{61e^7}{5040r^6} + \frac{277e^9}{72576r^8} + \cdots,$$

1) Commercium epist. No. XVIII. — 2) Ebenda No. XIX. — 3) Ebenda No. XX. — 4) Sein Neffe David Gregory (1661—1708) gab in seiner Exercitatio geometrica de dimensione figurarum, Edinbourg 1684 in 4° 39—40 eine Ableitung der arctg-Reihe, wie sie wahrscheinlich James Gregory, in dessen Nachlasse sich nichts darüber vorfand, vollzogen habe. Die Methode ist aber im Wesentlichen dieselbe wie die Newtons, und letzterer sagt auch in einem für Leibniz bestimmten Briefe vom 24. Okt. 1676: „Sub eo tempore Jac. Gregorius, ex unica quadam serie e meis, quam D. Collinius ad eum transmiserat, post multam considerationem (ut ad Collinium rescripsit) pervenit ad eandem Methodum...“ Commercium epist. LVII. Desgleichen Collins in dem Briefe vom 21. Februar 1701 an Bertet in Paris: „D. Jac. Gregorius apud Scotos nuperrime incidit in eandem Methodum.“ Ebenda XXII.

denen er außerdem die durch Umkehr aus denselben erhaltenen Reihen für den Bogen in Funktion von log sec, resp. log tg beifügte.

Nachdem hiermit die wichtigsten trigonometrischen und zyklometrischen Reihen gefunden waren, trat ein anderer Kämpe auf, dessen Tätigkeit allerdings für unsere Wissenschaft weniger von Bedeutung ist, als für die aus derselben Zeit datierende Erfindung des Differentialkalküls: wir meinen Gottfried Wilhelm Leibniz, den großen Gegner Newtons.[1]) 1646 geboren, bezog er bereits 1661 die Leipziger Universität, 1667 kam er in Beziehung zu dem ehemaligen kurmainzischen Minister Joh. Christ. von Boineburg, durch den er mit Oldenburg bekannt wurde, welcher 1673 seine Ernennung zum Mitglied der Royal Society vermittelte. 1672 und 73 war er zeitweise in Paris, wo er den Kreis berühmter, damals dort anwesender Gelehrter, darunter auch Huygens, kennen lernte und immer tiefer in mathematische Spekulationen eindrang. Auch in London und in den Niederlanden hielt er sich vorübergehend auf und ließ sich 1676 in Hannover nieder. Daselbst starb er am 14. November 1716.

Für uns sind seine Versuche, den Kreisumfang durch eine Reihe darzustellen von Interesse. Anknüpfend an die Kettenbruchentwickelung Brounckers und die Produktformel von Wallis suchte er nämlich zunächst nach einer ähnlichen Darstellung der Kreisfläche, wie sie Mercator für die Hyperbelfläche erhalten hatte, und fand hierbei (jedenfalls vor Oktober 1674[2])) die nach ihm benannte Reihe $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$ Er hielt dieselbe für neu, da ihm Oldenburg erst am 12. April 1675 Gregorys Arcustangensreihe mitteilte, machte aber Oldenburg erst am 27. August 1676 mit ihr bekannt[3]) und übergab sie 1682 in den Acta Eruditorum (p. 41ff.) der Öffentlichkeit, ohne jedoch jemals seine Ableitung anzugeben. Dieselbe fand sich erst in seinem Nachlasse und wurde von Gerhardt publiziert[4]).

Die Reihen für Cosinus und Sinus, deren letztere ihm Oldenburg ebenfalls in dem erwähnten Briefe vom 12. April 1675 übermittelt hatte, leitete Leibniz in einer 1693 in den Acta Erud. gedruckten Abhandlung ab.[5]) Die hier erwähnte neue Methode ist die

1) Das Folgende ist Cantor III, 2, 29—33 entnommen. — 2) In einem Briefe vom 26. Okt. 1674 an Oldenburg schrieb er: „. . . inveni seriem Numerorum valde simplicem, cujus summa exacte aequatur Circumferentiae Circuli; posito Diametrum esse unitatem.“ Leibniz' Schriften v. C. J. Gerhardt, 1. Abtl. B I, 1849, 8°, 55. Die Abhandlung über seine Reihe hatte er auch Huygens zugeschickt. Vgl. ebenda B II, 16. — 3) Ebenda I, 117. — 4) A. a. O. V, 106ff. — 5) Die Sinus- und Cosinusreihe hatte er Oldenburg mit kurzer Skizzierung seiner Methode in dem erwähnten Briefe von 1676 bereits übermittelt, Gerhardt I, 118.

der unbestimmten Koeffizienten, welche er, wie aus der eben angeführten Handschrift hervorzugehen scheint, schon seit 1676 zum Zwecke der Reihenentwickelung verwendete.

Übrigens hatte Leibniz die genannten Reihen schon zwei Jahre früher in der unter dem Titel „Quadratura arithmetica communis Sectionum Conicarum, quae centrum habent etc." in den Acta Erud. erschienenen Abhandlung ohne Beweis veröffentlicht und gab in derselben außerdem noch Reihen für $\log \frac{1}{\sin x}$, $\log (1 + \cos x)$, $\log (1 - \cos x)$, $\log (1 - \cos^2 x)$ und $\log \sqrt{1 - \cos^2 x} = \log \sin x$ in Funktion von $\cos x$ an, die nachmals Jacob Bernoulli sämtlich in seinem vierten Aufsatze über unendliche Reihen (1698, Opera J. Bernoullii p. 853) mittelst Differentialrechnung bewies.

Nachdem Newton von der Leibnizschen Reihe Kenntnis erhalten hatte, kam er in jenem schon erwähnten Briefe vom 24. Oktober 1676 an Oldenburg auf dieselbe zu sprechen und bemerkte, daß, wenn man mit ihr π auf 20 Dezimalen erhalten wollte, nicht weniger als 5000 000 000 Glieder zusammengerechnet werden müßten, wozu etwa 1000 Jahre nötig wären, während bei Anwendung der Arcussinus-Reihe hierzu 55—60 Terme ausreichten, wenn man arcsin 45^0 nähme; noch schneller aber komme man mit arcsin 30^0 oder arcsin 60^0 zum Ziele. Auf diese Weise bestimmte Newton π auf 14 Dezimalen richtig (p. 137). Außerdem zeigte er in demselben Briefe[1]), wie man mit Hilfe seiner Reihen die Herstellung der Sinustafeln vereinfachen kann, indem er zunächst an einer Figur nachwies, wie sich die Sinus und Cosinus vielfacher Winkel oder der Summen $\alpha + \beta$, $\alpha + 2\beta \ldots \alpha + n\beta$ successive berechnen lassen, so daß alles von der Bestimmung der Grundfunktionen eines einzigen Winkels abhängt. Ist dieser Winkel x^0 und $90^0 : x^0 = n$, $\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = 2{,}4694\ldots$, so setze man $z = \left(\frac{\pi}{2n}\right)^2 = \frac{2{,}4694\ldots}{n^2}$, dann geben drei oder vier Glieder der Cosinus-Reihe den $\cos x^0$. So, sagt er, könne man zuerst einen Winkel von 5^0 annehmen und dann die Tafel von fünf zu fünf Grad berechnen; auf dieselbe Weise ließen sich hernach die Funktionswerte der einzelnen oder der halben Grade interpolieren und nach Berechnung von zwei Dritteln der Tafel erhalte man das letzte Drittel durch bloße Additionen und Subtrakionen. Zur Berechnung der Zehntel- und Hundertstel-Grade aber müsse man sich einer anderen Methode bedienen. Die hier angeführte Stelle ist deshalb von Wichtigkeit, weil sie die erste ist, an welcher

1) Briefwechsel Ed. Gerhardt I, 1, 140—141. Commercium LXII, Ed. Biot-Lefort 139—140.

die Herstellung einer trigonometrischen Tafel mit Hilfe der Reihen gelehrt wird.[1])

Wir erwähnten oben, daß Jakob Bernoulli (1654—1705), Professor in Basel, einige von Leibniz zuerst aufgestellte Reihen ableitete, indem er sich der Differentialrechnung bediente. Es war dies der ältere der beiden Brüder, die sich um die Ausbildung der neuerfundenen Rechnungsart so hohe Verdienste erworben haben, und zugleich der älteste jener berühmten Mathematikerfamilie, deren Arbeiten teils den Übergang von den Entdeckungen Leibniz' und Newtons zu den unsterblichen Schöpfungen Eulers bildeten, teils die erstern mit Glück fortsetzten. Außer Bernoullis grundlegenden Arbeiten in der Reihenlehre ist für uns eine Anwendung des Infinitesimalkalküls bemerkenswert, durch welche er den Inhalt eines sphärischen Dreiecks darzustellen suchte.[2]) Mit Erläuterung derselben wollen wir dieses Kapitel schließen.

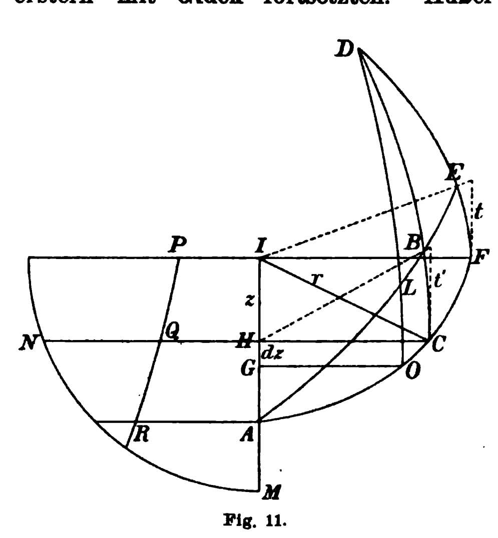


Fig. 11.

Sei ABC ein bei C rechtwinkliges sphärisches Dreieck (Fig. 11), D der Pol von AC, I der Kugelmittelpunkt, IA, IC und IF Radien $= r$; ferner seien AF, DF, DC, DO Quadranten größter Kreise und CH und OG die Sinus der Bögen AC und AO. Ist endlich OC ein unendlich kleiner Teil des Bogens AC und $\operatorname{tg} FE = \operatorname{tg} \sphericalangle BAC = t$, $IH = z$, $GH = dz$, so ergeben sich folgende Beziehungen: $HC\,(=\sqrt{r^2 - z^2}) : IC = HG : OC$, oder $OC = \frac{r\,dz}{\sqrt{r^2 - z^2}}$, weiter ist $IF\,(=\sin AF) : HC\,(=\sin AC)$

1) Es wären noch verschiedene Bemerkungen Newtons, die sich auf trigonometrische Reihen beziehen, anzuführen. Da dies jedoch der Platz nicht erlaubt, so erwähnen wir nur noch seine Lösung der Aufgabe „die Tangente zu finden, die einem Bogen möglichst nahe kommt" (Comm. ep. L. Ed. Biot-Lefort 110—111, 13. Juni 1676), die eine von Huygens in seiner Kreisquadratur gegebene Lösung an Genauigkeit übertrifft. Auch möge hier erwähnt werden, daß Newton sich schon in den Principien (I, Sectio 6, Lemma 28) mit der Frage nach der Möglichkeit der Kreisquadratur beschäftigt und daselbst einen ungenügenden, später von D'Alembert (Opuscula IV, 66) und Ruffini (siehe weiter unten) angegriffenen Beweis für die Unmöglichkeit der Lösung gibt. — 2) Acta Erud. 1691, 287—288.

$= \operatorname{tg} EF : \operatorname{tg} CB$; d. h. $r : \sqrt{r^2 - z^2} = t : t'$, $t' = \frac{t\sqrt{r^2 - z^2}}{r} = \operatorname{tg} BC$, und da ferner $\sec BC : \operatorname{tg} BC = r : \sin BC$, so hat man $\sin BC = \frac{rt\sqrt{r^2 - z^2}}{\sqrt{t^2(r^2 - z^2) + r^4}}$, und das Flächendifferential ist dann $OC \cdot \sin BC = \frac{r^2 t\,dz}{\sqrt{t^2(r^2 - z^2) + r^4}}$, „cujus integrale = area Trianguli ABC". Dieser Integralausdruck wird nun durch ein ebenes Flächenstück dargestellt. Aus I wird nämlich mit Radius $IM = \frac{r\sqrt{t^2 + r^2}}{t}$ ein Halbkreis beschrieben und die Kurve PQR so konstruiert, daß ihre Ordinate HQ die dritte Proportionale zu HN und dem Radius der Kugel ist, dann stellt $AHQR$ die Oberfläche des sphärischen Dreiecks dar.

Wir haben die Ableitung Bernoullis skizziert, einmal da uns die Art und Weise, wie er das Integral geometrisch ausführt, von historischem Interesse zu sein scheint, und dann auch, weil hier zum erstenmal die höhere Rechnung auf ein trigonometrisches Problem angewendet wird.

Außerdem müssen wir aber noch hervorheben, daß sich Bernoulli in seinen Formeln der Schreibweise sin., tang. und sec. durchweg bedient und zwar derart, daß er das Argument, z. B. AC, dem Zeichen nachsetzt, also ungefähr wie wir, $\sin \cdot AC$ schreibt; während also die übrigen Analysten, wie Wallis, Gregory, ja selbst Newton und Leibniz nur einzelne Ruchstaben als abkürzende Bezeichnungen trigonometrischer Linien gebrauchten, wendet Jakob Bernoulli die Silben sin., tang. und sec. bereits als Funktionszeichen auf veränderliche Bögen (wie AC) an, wenn er sich auch des Wortes „Funktion" hier noch nicht bedient; dasselbe tritt wohl erst ein Jahr später (1692) auf[1]), aber auch da noch nicht für die trigonometrischen Linien.

Wenden wir bei dem Abschluß dieses Kapitels den Blick noch einmal auf den durchmessenen Weg zurück, so sehen wir zunächst, daß in der zweiten Hälfte des 17. Jahrhunderts die Logarithmen fast ausschließlich bei trigonometrischen Rechnungen benutzt wurden, und daß sich, wenn auch nur ganz allmählich, das Bedürfnis, die langatmigen Regeln durch eine Formelsprache zu ersetzen oder doch wenigstens abkürzende Bezeichnungen für die trigonometrischen Linien einzuführen, geltend machte. Die Einwirkung der Fermat-Descartesschen Geometrie zeigte sich in der Konstruktion der Sinus-, Tangenten- und Sekantenkurven, und der Vorzug analytischer Umformungen vor rein geometrischen Betrachtungen trat namentlich in den Beweisen

1) Vgl. hierüber M. Cantor III, 2, 215 und hierzu Eneström in Bibl. math. 1901, 150.

der Neperschen Analogieen zutage. Wie in jener Zeit die wesentlichsten Fortschritte in der reinen Trigonometrie von den Engländern gemacht wurden, so kommt auf ihre Rechnung auch die erfolgreiche Weiterförderung der Kenntnisse von den Winkelschnitten und den Teilungsgleichungen, während die Probleme der näherungsweisen Rektifikation und Quadratur des Kreises, die schon ein Jahrhundert früher die Niederländer besonders beschäftigt hatten, durch Huygens ihre größte mit den alten Mitteln erreichbare Vollendung erhielten.

Neue Gesichtspunkte, namentlich für die Geometrie eröffnete endlich die Erfindung der unendlichen Reihen und die großartige Schöpfung des Infinitesimalkalküls, insofern durch ihn die Reihenentwickelungen gefördert wurden, und unzählige neue Probleme in Angriff genommen werden konnten, die selbst wieder in der Folge zur Bereicherung der Goniometrie beitragen sollten.

3. Kapitel.

Die Entwicklung der Trigonometrie im 18. Jahrhundert bis zum Auftreten L. Eulers.

§ 1. Die ersten allgemeinen Formeln zur Bestimmung der trigonometrischen Funktionen vielfacher Winkel.

Wie wir wissen hatten sich schon Vieta, Bürgi, Oughtred und Wallis mit der Bildung der trigonometrischen Funktionen vielfacher Winkel aus denen des einfachen Winkels mit Glück befaßt und die Bildungsgesetze der Zahlenkoeffizienten mit Hilfe der figurierten Zahlen nachgewiesen, aber allgemeine Formeln für $\sin nx$ und $\cos nx$ aufzustellen lag ihnen noch fern; der Gedanke an solche Darstellungen trat vielmehr erst auf, als die unendlichen Reihen entstanden. Und in der Tat finden wir die erste Formel dieser Gattung in jenem ersten Briefe vom 13. Juni 1676, den Newton durch Oldenburg an Leibniz richtete.[1] Darin führt er als Beispiel seiner allgemeinen Methode der Reihenumkehr die Aufgabe an, die Sehne eines Bogens zu bestimmen, der sich zu einem Bogen, dessen Sehne bekannt ist, wie $n:1$ verhält. Ist x die Sehne des gegebenen Bogens und d der Durchmesser, so lautet die Lösung dieser Aufgabe, deren Ableitung er nicht mitteilt: die Sehne des gesuchten Bogens =

$$nx + \frac{1-nn}{2\times 3dd}xxA + \frac{9-nn}{4\times 5dd}xxB + \frac{25-nn}{6\times 7dd}xxC + \frac{49-nn}{8\cdot 9dd}xxD + \cdots,$$

1) Commercium epistol. Ed. Biot 106.

wobei nach einer damals viel gebrauchten Schreibweise die großen Buchstaben das jedesmal vorhergehende Glied bedeuten. Setzen wir $d = 2$, $x = \sin\varphi$ und führen für $A, B\ldots$ ihre Bedeutungen ein, so erhalten wir die uns wohlbekannte Reihe[1]):

$$\sin n\varphi = n \sin\varphi + \frac{(1-n^2)n}{3!}\sin^3\varphi + \frac{(1-n^2)(9-n^2)n}{5!}\sin^5\varphi + \cdots$$

Die fehlende Ableitung hat De Moivre in einer kleinen Abhandlung in den P. T. 1698, No. 240, 190—193 nachgeliefert, indem er zunächst allgemein die Aufgabe löste, aus der Gleichung: $az + bz^2 + cz^3 + \cdots = gy + hy^2 + iy^3 + \cdots z$ zu bestimmen. Zu diesem Zwecke setzte er $z = Ay + By^2 + Cy^3 + \cdots$ und bestimmte durch Einführung dieses Wertes in die obige Gleichung die Koeffizienten A, B etc., deren rekurrentes Bildungsgesetz er genau angab. Indem er dann im speziellen in die Gleichung $\arcsin z = n \arcsin y$ die bekannte Arcussinus-Reihe einführte, erhielt er Newtons angeführte Entwicklung. Sowohl Newton als De Moivre fügten dieser Reihe die Bemerkung bei, daß sie nur für ein ungerades ganzzahliges n eine endliche Reihe wird, nahmen also offenbar ihre Gültigkeit für ein beliebiges n beweislos an.

Die Reihe Newtons, sowie Moivres Beweis scheinen wenig beachtet worden zu sein (auch die Historiker haben sie bisher ganz übersehen), denn im Jahre 1700 machte Johann Bernoulli auf die Notwendigkeit ähnlicher Entwicklungen für beliebiges n bei der Quadratur von Segmenten der Zykloide aufmerksam[2]) und kündigte an, daß er eine solche Formel gefunden habe. Nachdem sich dann sein Bruder Jakob im Dezember desselben Jahres dahin ausgesprochen hatte[3]), daß die Aufgabe der Winkelteilung nur dann algebraisch sei, wenn sie in ganzzahligen Verhältnissen ausgeführt werde, dagegen transzendent, wenn man eine unbestimmte Teilung in ganz beliebigem Verhältnis verlange, veröffentlichte Johann im Aprilheft 1701 der Acta Erudit. die bereits erwähnte Reihe in folgender Form.[4]) Ist a die Sehne eines gegebenen Bogens, der Kreisradius $= 1$ und $b = \sqrt{4-a^2}$ die Supplementarsehne, und bedeuten x und y die entsprechenden Sehnen des n-fachen Bogens, so ist:

$$x = ab^{n-1} - \frac{n-2}{1}ab^{n-3} + \frac{(n-3)(n-4)}{1\cdot 2}ab^{n-5} - \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1\cdot 2\cdot 3}ab^{n-7} + \cdots,$$

und wenn man a mit x, b mit y und umgekehrt vertauscht, so er-

1) Für spezielle Werte von n steht sie bei Vieta Opera 299. — 2) Acta Erud., Juni 1700, 268. Opera Joh. Bernoullii I, 331—332. — 3) Ebenda, 1700, 551. Opera Jak. Bernoullii II, 892. — 4) Acta Erud., 1701, 170 ff. Opera 386—392.

hält man die Formel für die n-Teilung. Führt man statt der Sehnen den Sinus ein, so lautet die Formel:

$$\sin nx = \sin x \cdot \left\{2^{n-1}\cos^{n-1}x - \frac{n-2}{1}2^{n-3}\cos^{n-3}x + \frac{(n-3)(n-4)}{1\cdot 2}2^{n-5}\cos^{n-5}x - \cdots\right\}$$

Vergleichen wir dieselbe mit einer von Vieta gegebenen (Opera Edit. Schooten, 297), so erkennen wir, daß sie keineswegs neu war, wie Bernoulli behauptete, sondern der Fortschritt nur in der allgemeinen Aufstellung derselben lag.[1]) Dasselbe gilt auch von den beiden Reihen:

$$\sin nx = n\sin x\cos^{n-1}x - \binom{n}{3}\sin^3 x\cos^{n-3}x + \binom{n}{5}\sin^5 x\cos^{n-5}x - \cdots,$$

$$\cos nx = \cos^n x - \binom{n}{2}\sin^2 x\cos^{n-2}x + \binom{n}{4}\sin^4 x\cos^{n-4}x - \cdots,$$

welche er noch anführt, und die wir für ein ganzzahliges n, wenn auch nicht in allgemeiner Form, ebenfalls bereits bei Vieta fanden (Tl. I, S. 165). Einen Beweis für diese Formel hat Johann Bernoulli nicht mitgeteilt[2]), ein solcher wurde von Jakob Hermann in den Acta Erud. von 1703 gegeben und zwar, indem Hermann genau wie Vieta verfahrend die Formeln bis $n = 9$ an der Figur entwickelte und dann auf ein beliebiges n schloß.

Hermann war ein Schüler Jakob Bernoullis, der daher den Inhalt seiner Arbeiten über diesen Gegenstand schon vor der Veröffentlichung kannte. Da er aber bei seinen eigenen Untersuchungen einen ganz anderen Weg als Hermann beschritten hatte, so veröffentlichte er dieselben im Jahre 1702 in den Mémoires der Pariser Akademie.[3]) Die daselbst mitgeteilten allgemeinen Formeln lauten:

$$a = nx - \frac{n(n^2-1)}{4\cdot 6}x^3 + \frac{n(n^2-1)(n^2-9)}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}x^5 - \frac{n(n^2-1)(n^2-9)(n^2-25)}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12\cdot 14}x^7 + \cdots,$$

$$b = 2 - \frac{n^2}{4}x^2 + \frac{n^2(n^2-4)}{4\cdot 6\cdot 8}x^4 - \frac{n^2(n^2-4)(n^2-16)}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12}x^6 + \cdots\text{[4]}),$$

wobei x die Sehne des einfachen Bogens, a die des n-fachen und b die Supplementarsehne bedeuten. In der ersten Formel erkennen wir die bereits von Newton gegebene. Auch sie wurden geometrisch abgeleitet, indem man zunächst durch fortgesetzte Verdoppelung die

1) Bernoulli glaubte übrigens diese Formeln für ein beliebiges ganzzahliges, gebrochenes und irrationales n gebrauchen zu dürfen: um die Konvergenz der entstehenden Reihen kümmerte er sich nicht. — 2) Er bemerkt allerdings, daß er einen solchen für die erste Formel dem Marquis de l'Hospital brieflich mitgeteilt habe. — 3) Brief vom 13. Juli 1702 a. a. O. 281—288. — 4) Für spezielle Werte von n steht diese Formel wie die vorhergehenden bei Vieta, Opera 299.

Quadrate der Sehne (a^2) und der Supplementarsehne (b^2) eines geraden Vielfachen des Bogens herstellte, und dann wurde mittelst der Methode der unbestimmten Koeffizienten die Wurzel gezogen. Das Bildungsgesetz der Koeffizienten, welche in a^2 und b^2 auftraten, wurde wie früher aus der Betrachtung der figurierten Zahlen geschlossen, wobei sich diese Formeln zugleich für ein beliebiges ganzzahliges n verallgemeinern ließen. Aus seinen allgemeinen Formeln ergaben sich dann leicht die Cosinusreihe und die Reihe für den Sinusversus, bezüglich deren er auf Leibniz verweist, dessen einschlägige Abhandlung wir S. 65 anführten.

Durch die Arbeiten der beiden Bernoulli neu angeregt kam die Frage nach der Multiplikation und der Teilung der trigonometrischen Funktionen nicht sofort wieder zur Ruhe. Zunächst untersuchte Thomas Fantet de Lagny (1660—1734)[1]) dieselbe Frage für die Tangenten und Sekanten und zwar überhaupt zum erstenmal, wobei er behauptete[2]), daß die Eigenschaften dieser Linien wesentlich einfacher seien, als die des Sinus und Cosinus und sich unmittelbar aus dem rechtwinkligen Dreieck ergeben, ohne daß man sie wie jene, mit dem Kreis in Beziehung zu setzen brauche. Um aus $b = \operatorname{tg} x$ und dem Radius a die Tangente des Winkels nx zu bilden, gibt er nun folgende Regel: 1) Entwickle $(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \cdots$, 2) Nimm als Nenner eines Bruches das erste, dritte, fünfte Glied etc. und als Zähler das zweite, vierte, sechste etc. dieser Entwicklung multipliziert mit a, und gib 3) den Gliedern im Zähler und Nenner abwechselnd die Zeichen + und —, dann stellt dieser Bruch die Tangente von nx dar.

Um ferner $\sec nx$ aus $\sec x = c$ zu bilden, bediene dich desselben Nenners wie bei $\operatorname{tg} nx$ und als Zähler nimm c^n, wenn n ungerade ist, und ac^n, wenn n gerade ist. Nach dieser Regel wird also z. B. $\operatorname{tg} 5x = \frac{5a^4 b - 10a^2 b^3 + ab^5}{a^5 - 10a^3 b^2 + 5ab^4}$ und $\sec 5x = \frac{c^5}{a^5 - 10a^3 b^2 + 5ab^4}$. Die Ableitung wird durch Induktion gemacht, indem zunächst $\sphericalangle ABC = x$ (in Fig. 12) verdoppelt, dann

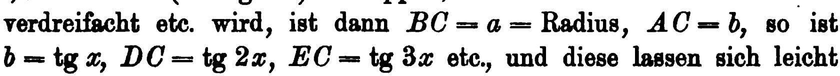


Fig. 12.

verdreifacht etc. wird, ist dann $BC = a =$ Radius, $AC = b$, so ist $b = \operatorname{tg} x$, $DC = \operatorname{tg} 2x$, $EC = \operatorname{tg} 3x$ etc., und diese lassen sich leicht

1) Lagny war zu Lyon geboren, wurde 1695 Mitglied der Pariser Akademie, 1697 Professor der Hydrographie zu Rochefort, dann Direktor der Bank in Paris und zuletzt Konservator der k. Bibliothek. — 2) Histoire et Mémoires de Paris 1705, 26. August, p. 256.

successive aus a und b ausdrücken. Ebenso findet Lagny die Regel für die Sekanten $AB = c = \sec x$, $BD = \sec 2x$, $BE = \sec 3x$ etc.

Eine wichtige Folgerung, die wir nicht übergehen dürfen, zieht Lagny aus seinen Formeln. Zunächst gibt er an, daß für $nx = 90^0$ $\operatorname{tg} nx = \infty$ ist, also der Nenner in den Ausdrücken verschwindet, wodurch man die Teilungsgleichungen für die Tangente erhält, z. B. für $5x = 90^0$, $a^5 - 10a^3b^2 + 5ab^4 = 0$, $b = \operatorname{tg}\frac{90^0}{5} = \operatorname{tg} 18^0$. Wird aber $nx > 90^0$, und liegt dieser Bogen im 2. Quadranten, so ist der Zähler +, der Nenner —, also die Tangente negativ, liegt er im 3. Quadranten, so sind Zähler und Nenner —, also die Tangente positiv und für den 4. Quadranten ist der Zähler —, der Nenner +, also die Tangente wieder negativ, „et au dessus de quatre droits cela recommence dans le même ordre à l'infini". Er hat hier (a. a. O. p. 263) zum erstenmal die Zeichen der Tangente für Winkel verschiedener Quadranten richtig bestimmt und auch die Periodizität der Funktion erkannt.

Während Lagny das allgemeine Gesetz zur Bildung von $\operatorname{tg} nx$ und $\sec nx$ nur in Worten darstellte, gab ein Jahr später Jakob Hermann[1]) die allgemeinen Formeln für ein beliebiges ganzes oder gebrochenes n an, indem er sich zunächst die Additionstheoreme in der Form: $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) : \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = r^2 : r^2 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta$ und $\sec(\alpha + \beta) : r = \sec\alpha \sec\beta : r^2 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta$ geometrisch verschaffte, eine Form, die wir an keiner früheren Stelle finden konnten[2]), und diese dann wiederholt anwendend auf die allgemeine Formel schloß. Weiter ging Johann Bernoulli, indem er 1712[3]) statt der bloß induktiven Ableitung eine rechnerische für jene Formeln gab. Schon 1702[4]) hatte er nämlich den Zusammenhang zwischen den Arcusfunktionen und dem Logarithmus einer imaginären Zahl entdeckt, indem er das Differential $\frac{a}{b^2 + z^2} dz$ durch die Substitution $z = \frac{(t-1)b}{t+1} i$ in

1) Acta Erud. 1706, 256—263. Er sagt hier, in der Hist. de l'Acad. von 1703 sei p. 64 bemerkt, Lagny habe die allgemeinsten Formeln für Tangente und Sekante gefunden, da sie jedoch weder dort noch in den Mémoires desselben Jahres angeführt seien, so teile er die seinigen mit. Die Arbeit Lagnys von 1705 scheint ihm also nicht bekannt gewesen zu sein. — 2) Montucla, Histoire des mathém., Paris an X, III, 277 bemerkt unrichtigerweise, Fr. Christian Maier sei der erste gewesen, der (1727) die Additionstheoreme der trigonometrischen Funktionen aufstellt, und an ihn schließt sich H. Bosmans in Anm. 10 zu seinem „Le Traité des Sinus de Michiel Coignet", (Bruxelles 1781) im allgemeinen an. — 3) Acta Erud., Juni 1712, 274—277, Opera I, 511—514. Er führt hier Lagnys Regel zuerst in Worten an, ohne jedoch ihn nach Hermann zu nennen und teilt dann die Formel mit. — 4) Mémoires de l'Académie de Paris 1702, veröffentlicht 1704, 289—297, Opera I, 393—400. Vgl. auch P. Stäckel, Bibl. math. 1900, 110—111.

die Form $-\frac{a}{2bti}dt$ $(i=\sqrt{-1})$ überzuführen lehrte, und nun verwendete er diesen „logarithme imaginaire" zur Aufstellung der Formel für $\operatorname{tg} nx$. Ist nämlich $\operatorname{tg} x = z$, $\operatorname{tg} nx = y$, so besteht die Differentialgleichung $2in\frac{dz}{z^2+1} = 2i\frac{dy}{y^2+1}$ oder $\frac{ndz}{z-i} - \frac{ndz}{z+i} = \frac{dy}{y-i} - \frac{dy}{y+i}$, und durch Integration ergibt sich $(z-i)^n(y+i) = (z+i)^n(y-i)$. Führt man die Potenzen und Produkte auf beiden Seiten aus, so hebt sich das Imaginäre weg und man erhält durch Auflösung nach y die gesuchte Formel für $y = \operatorname{tg} nx$.

Merkwürdig ist übrigens, daß weder Lagny, noch Hermann, noch auch Bernoulli bemerkten, daß sich ihre mühsam gesuchten Formeln direkt hätten hinschreiben lassen, wenn sie die ihnen geläufigen Entwicklungen für $\sin nx$ und $\cos nx$ in Funktion von $\sin x$ und $\cos x$ (siehe S. 69) zum Quotienten formiert und dann Zähler und Nenner mit $\cos^n x$ dividiert hätten. Erwähnen wir noch, daß sowohl Hermann als auch Bernoulli die Gültigkeit der Formeln für beliebiges n hervorheben, allerdings ohne diese Behauptung irgendwie zu begründen!

Übrigens kam Bernoulli später[1]) noch einmal auf die Entwicklung von $\operatorname{tg} nx$ zurück, indem er einen allgemeinen Beweis mit Vermeidung des Imaginären anstrebte, dabei aber genau Hermanns Gedankengang einschlug, den er nur näher ausführte. Er entwickelte nämlich zunächst geometrisch $\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma+\cdots)$ in der Form: $(A-C+E-G+J-\cdots):(1-B+D-F+H-\cdots)$, wobei A die Summe der Kombinationen zur ersten Klasse aller Tangenten $(\operatorname{tg}\alpha, \operatorname{tg}\beta, \operatorname{tg}\gamma\cdots)$, B die zur 2. Klasse, C die zur 3. Klasse u. s. w. bedeuten, ohne jedoch den Induktionsschluß zu begründen (also das Additionstheorem in der allgemeinsten Gestalt), und setzte dann $\alpha=\beta=\gamma\cdots$, n an der Zahl, woraus jene Formel unmittelbar folgte. Noch weniger begründet aber wurde der Übergang von einem ganzzahligen zu einem beliebigen n.[2])

Durch die Arbeit Lagnys, welcher seine Regel für $\operatorname{tg} nx$ direkt aus dem rechtwinkligen Dreieck geschöpft hatte, wurde Christian

---

1) Acta Erud. 1722, 361, Opera II, 526. — 2) Am Schlusse dieser Abhandlung gibt er an, daß er erst nach Abfassung derselben entdeckt habe, daß das Problem schon 1706 in den Acta Erud. gelöst worden sei, hebt aber gleichzeitig die Bedeutung seines allgemeinen Additionstheorems für die Tangente, als dort noch nicht gegeben, ganz gebührend hervor. Recht glaubwürdig klingt die Behauptung gerade nicht, wenn man bedenkt, daß Joh. Bernoulli jeden Jahrgang der Acta Erud. sicher kannte, da diese damals das Hauptorgan in Deutschland waren.

Wolf angeregt, die entsprechende Formel für $\sin nx$ auf demselben Wege, also ohne den Ptolemäischen Satz vom Sehnenviereck aufzustellen, was ihm auch ohne besondere Schwierigkeit in einer kleinen Abhandlung in den Acta Erud. 1707 (p. 313 ff.) gelang. Eine ähnliche Ableitung gab dann 1709 auch der Graf F. E. Herberstein[1]), sowohl für $\sin nx$ als für $\operatorname{tg} nx$, ohne daß dadurch etwas besonders Neues geleistet worden wäre. Endlich gab De la Hire in den Pariser Memoiren 1710 eine neue geometrische Ableitung des Additionstheorems für die Sehnen zweier Winkel und zeigte, „wie man analytisch durch fortgesetzte Anwendung desselben die Dreiteilung, Fünfteilung u. s. w. erhalten könne.“ Dabei gab er die geometrische Lösung der Dreiteilung mittelst der gleichseitigen Hyperbel und der Fünfteilung mittelst einer Kurve dritter Ordnung.

Auf Johann Bernoullis Methode, mit dem imaginären Logarithmus $\operatorname{tg} nx$ zu bestimmen, kam sehr viel später, nämlich 1738, der Engländer John Machin († 1751), Professor der Astronomie am Gresham Colledge und Sekretär der Royal Society, wieder zurück[2]), indem er die Entwicklung, die er vor vielen Jahren gefunden haben will, in der Formel angab: $T = \frac{\overline{r+\tau}|^n - \overline{r-\tau}|^n}{\overline{r+\tau}|^n + \overline{r-\tau}|^n} \cdot \varrho$, dabei war $\varrho^2 = -r^2$, $\tau^2 = -t^2$ gesetzt, $t = \operatorname{tg} x$ und $T = \operatorname{tg} nx$ und r bedeutete den Radius. In unserer Schreibweise lautet die Formel für $r = 1$

$$\operatorname{tg} nx = \frac{(1 + i \operatorname{tg} x)^n - (1 - i \operatorname{tg} x)^n}{(1 + i \operatorname{tg} x)^n + (1 - i \operatorname{tg} x)^n} \cdot i.$$ [3])

Man erkennt, daß kein Unterschied mit Bernoullis Formel besteht, die der Verfasser jedoch ignoriert; er bemerkt nur, die Entwicklung sei schon bekannt. Ähnlich stellt er dann auch die Reihen für $\sin nx$ und $\cos nx$ dar, wodurch er auf die von Jakob Bernoulli gegebenen Formeln kommt, die übrigens in der Zwischenzeit (1726) noch einmal von F. C. Maier[4]), dem wir noch öfter begegnen werden, aus dem Additionstheorem für $\sin x$ und $\cos x$ rechnerisch entwickelt worden waren.

---

1) Acta Erud. 1709. — 2) P. T. 1738 Nr. 447, p. 207 ff. — 3) Im Zähler sollten hier Minuend und Subtrahend vertauscht sein, damit $\operatorname{tg} nx$ positiv wird. In gewissem Sinne steht diese Gleichung mit dem Satze von Moivre im Zusammenhang, auf den wir im nächsten Paragraphen zu sprechen kommen. — 4) Commentarii Academ. Petropolitanae p. 53 ff.

§ 2. Die Sätze von De Moivre und Cotes. Differentialtrigonometrie des letzteren.

Abraham De Moivre (1667—1754) war in Vitry in der Champagne geboren, kam in jungen Jahren nach England, lebte daselbst später in London, wo er sich hauptsächlich durch Stundengeben ernährte, und wurde 1697 Mitglied der Royal Society. Seine Arbeiten schlossen sich so enge an Newton an, daß man ihn wohl einen Schüler desselben nennen kann.

Wir sahen schon, daß er sich 1698 mit dem Multiplikations- und Teilungsproblem beschäftigte, und dieser Richtung gehören noch mehrere Arbeiten an, in welchen er jenen Satz niederlegte, der später seinen Namen erhielt.[1] Zunächst veröffentlichte er 1707 in den P. T.[2] eine kurze Notiz, in der er „eine gemischte Gattung von Gleichungen" löste, „deren Wurzeln sich nach Art der Cardanschen Formel darstellen lassen". Die beiden Gleichungen waren in folgender Form enthalten, je nachdem man die oberen oder unteren Zeichen nahm:

$$ny \pm \frac{(n^2-1)n}{3!}y^3 \mathop{+}_{+} \frac{(n^2-1)(n^2-9)n}{5!}y^5$$
$$\pm \frac{(n^2-1)(n^2-9)(n^2-25)n}{7!}y^7 \mathop{+}_{+} \cdots = a$$

n ist hierbei eine ganze ungerade Zahl. In der zweiten Gleichung erkennen wir sofort die von ihm 1698 behandelte Newtonsche Entwicklung für $a = \sin n\varphi$, $y = \sin\varphi$. Die Wurzeln dieser beiden Gleichungen gab er ohne Ableitung in der Form an:

$$y = \tfrac{1}{2}\sqrt[n]{\sqrt{1+a^2}+a} - \tfrac{1}{2}\sqrt[n]{\sqrt{1+a^2}-a}$$

und

$$y = \tfrac{1}{2}\sqrt[n]{a+\sqrt{a^2-1}} + \tfrac{1}{2}\sqrt[n]{a-\sqrt{a^2-1}}.$$

Seine späteren Arbeiten zeigen, daß er aus der angenommenen Form der Wurzeln durch Wegschaffen der Irrationalitäten die Gleichungen gewonnen hatte.

Als spezielles Beispiel für die zweite Gleichung, die also für $a < 1$ die n-Teilungsgleichung der Funktion Sinus ist, nahm er $a = \frac{61}{64}$ und $n = 5$ an, wodurch die Gleichung in $5y - 20y^3 + 16y^5 = \frac{61}{64}$ übergeht, die die Wurzel

1) Eine nähere Ausführung über die Entdeckungsgeschichte des Moivreschen Theorems habe ich in der Bibliotheca math. II, 1901, p. 97—102 veröffentlicht. — 2) Nr. 309, p. 2368—2371.

$$y = \frac{1}{2}\sqrt[5]{\tfrac{61}{64} + \sqrt{-\tfrac{375}{4096}}} + \frac{1}{2}\sqrt[5]{\tfrac{61}{64} - \sqrt{-\tfrac{375}{4096}}}$$

hat. Diese gibt, „da man die fünften Wurzeln ausziehen kann", $y = \frac{1}{2}(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{-15}) + \frac{1}{2}(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{-15}) = \frac{1}{4}$. „Wenn man aber", so fährt Moivre fort, „die Wurzel nicht direkt ziehen kann, oder dies doch schwieriger scheint, so kann man es durch die gewöhnlichen Sinustafeln folgendermaßen bewerkstelligen: Es ist $a = \frac{61}{64} = 0{,}95312 = \sin 72^0\, 23'$ und der 5te Teil dieses Winkels ist $14^0\, 28'$, dessen Sinus 0,24981 oder näherungsweise $= \frac{1}{4}$ ist. Gerade so verfährt man bei Gleichungen höheren Grades." Durch dieses Beispiel gibt Moivre doch wohl zu erkennen, daß er damals schon im Besitze seines Satzes war, indem die obige Gleichung für $a = \sin n\varphi$, $y = \sin\varphi$ in die Gestalt:

$$y = \frac{1}{2}\sqrt[n]{\sin n\varphi + i\cos n\varphi} + \frac{1}{2}\sqrt[n]{\sin n\varphi - i\cos n\varphi} = \sin\varphi$$

übergeht. Diese Schreibweise findet sich allerdings bei ihm nicht, aber auch in den „Miscellanea analytica" von 1730, die man bisher immer als die Quelle des Moivreschen Satzes angeführt hat, ist dies nicht der Fall, sondern es heißt daselbst[1]) fast genau so wie in dem ersten Aufsatze: wenn l und x die Cosinus zweier mit dem Halbmesser 1 beschriebener Bögen A und B sind und $A = nB$ ist, so ist $x = \frac{1}{2}\sqrt[n]{l + \sqrt{l^2 - 1}} + \frac{1}{2}\sqrt[n]{l - \sqrt{l^2 - 1}}$, oder in unserer Schreibweise: $\cos B = \frac{1}{2}(\cos nB + i\sin nB)^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{2}(\cos nB - i\sin nB)^{\frac{1}{n}}$. Der Unterschied besteht nur darin, daß hier der Zusammenhang mit der Winkelteilung direkt ausgesprochen wird, während er im ersten Aufsatze absichtlich verschleiert und nur durch das Beispiel verraten ist.[2]) Übrigens hat De Moivre vor den Miscellanea analytica noch eine zweite Notiz 1722 veröffentlicht[3]), in der er auf einem etwas anderen Wege dasselbe Theorem entwickelte.

Acht Jahre nach der Veröffentlichung der Miscellanea kam er dann noch einmal auf sein Theorem zu sprechen[4]), indem es ihm inzwischen gelungen war, nicht nur wie früher die Summe zweier n^{ter} Wurzeln aus gewissen komplexen Zahlen in reelle Form zu bringen, sondern $\sqrt[n]{a + i\sqrt{b}}$ direkt auszuziehen. Indem er die Rechnung

1) Vgl. Cantor III, 2, 646. — 2) P. T. Nr. 374, p. 228—230. — 3) Nach dem p. 14 in den Miscellanea Mitgeteilten scheint er zu diesen Betrachtungen durch den Vergleich von Hyperbelsektoren gekommen zu sein. Vgl. hierüber S. Günther, Die Lehre von den Hyperbelfunktionen 1881, p. 13—14. — 4) De Reductione Radicalium ad simpliciores terminos, seu de extrahenda radice quacunque data ex Binomio $a + \sqrt{+b}$, vel $a + \sqrt{-b}$. Epistola ad W. Jones. P. T. XL, 1738, Nr. 451, p. 463—478.

zunächst für $n = 3$ durchführte und dann auf ihre Gültigkeit für einen allgemeinen Wert von n schloß, stellte er folgende Vorschrift zur Berechnung dieser Wurzel auf:[1] „Dieselbe sei gleich $x + i\sqrt{y}$, setzt man dann $\sqrt[n]{a^2 + b} = m$ und $\frac{n-1}{n} = p$[2]), denkt sich einen Kreis mit dem Radius $\sqrt{m}$ beschrieben, nimmt auf ihm den Bogen A, dessen Cosinus $\frac{a}{m^p}$ ist, schreibt C für den ganzen Kreisumfang und bildet die Winkel $\frac{A}{n}$, $\frac{C-A}{n}$, $\frac{C+A}{n}$, $\frac{2C-A}{n}$, $\frac{2C+A}{n}$ etc. n an der Zahl, so sind die Cosinus dieser Bögen für denselben Radius ebenso viele Werte von x, während $y = m - x^2$ ist. Hierbei ist zu beachten, daß die Cosinus der Winkel, welche $< 90^0$ sind, positiv, diejenigen der Winkel $> 90^0$ negativ zu nehmen sind." Außerdem gibt er noch die Anzahl der positiven und negativen Wurzeln für ein gerades und ein ungerades n richtig an.

Dadurch erst war der Satz in der allgemeinsten Weise aufgestellt, und nur die Herstellung einer allgemeinen Endformel, wie sie nachmals Euler gab, ist zu vermissen, während die Unvollständigkeit des Beweises in den geringen Anforderungen an Strenge, die man in jener Zeit überhaupt stellte, begründet lag.

In enger Beziehung zu dem Satze von Moivre steht, oder kann wenigstens in solche gebracht werden, das sogenannte Theorem von Cotes, welches die bekannte Zerlegung des Binoms $a^\lambda \pm b^\lambda$, wo λ eine positive ganze Zahl ist, in Faktoren darstellt. Der Engländer Roger Cotes (1682—1716) gehörte zu den begabtesten Mathematikern jener Zeit, und Newton, mit dem er viel korrespondierte, hielt große Stücke auf ihn. Cotes' Schriften, die er, zu früh dem Leben entrissen, nur teilweise vollendet zurückließ, wurden von seinem Freunde und Nachfolger auf dem von Thomas Plume gegründeten Lehrstuhle der Astronomie, Robert Smith, unter dem Titel „Harmonia mensurarum" 1722 in 4⁰ herausgegeben. Unter den hinterlassenen Papieren fand sich auch das erwähnte Theorem[3]) in geometrischer Gestalt, aber ohne Beweis angeführt. Noch im selben Jahre (1722) gab Pemberton einen jedoch sehr komplizierten Beweis desselben[4]), dann erbrachte Moivre von den rekurrenten Reihen ausgehend einen solchen und endlich bewies den Satz Johann Bernoulli[5]),

1) A. a. O. p. 475. — 2) Hier muß $\frac{n-1}{2} = p$ stehen! — 3) Harmonia mensurarum p. 113—114. — 4) In „Epistola ad amicum de Cotesii inventis" 1722, 4⁰, p. 13—28. — 5) Dieser übrigens noch recht umständliche Beweis findet sich in Opera. IV, p. 67—76. Auch noch eine andere Abhandlung Bernoullis (Ebenda p. 58—67) beschäftigt sich mit der Zerspaltung von $1 \pm x^n$ in

indem er sich auf seine 1701 gefundene Reihe für $\sin n\varphi$ stützte (siehe S. 69); keiner aber fand den innigen Zusammenhang des Theorems mit der trigonometrischen Auflösung von $x^n \pm 1 = 0$, welcher durch den Satz von Moivre hergestellt wird, obwohl Bernoullis Lösung sehr nahe daran streifte.

Um später nicht mehr darauf zurückkommen zu müssen, wollen wir gleich hier Cotes' übrige Verdienste um die Trigonometrie besprechen. Zunächst kannte er, wie Moivre, die Periodizität der trigonometrischen Funktionen sehr wohl, denn er zeichnete die sich periodisch wiederholende Tangenten- und Sekantenkurve für zwei Kreisumläufe des Argumentes richtig;[1]) ferner gab er einen „Modulus Canonis Trigonometrici" an[2]) und verstand darunter die Zahl $\frac{180^0}{\pi} = 57^0,2957795130 \cdots = 57^0\, 17'\, 44''$, deren reziproker Wert $\frac{\pi}{180} = 0{,}0174532925 \cdots$ ebenfalls richtig angeführt wird. Die Bezeichnung „Modulus" für diese Zahlen, die zur Reduktion von Längen- in Gradmaß und umgekehrt dienen, hat sich bis auf unsere Zeit erhalten.[3]) Endlich stellte Cotes die Regeln für die Differentiation trigonometrischer Funktionen wenigstens erstmalig zusammen in seiner hinterlassenen „Aestimatio errorum in mixta mathesi per variationes partium trianguli plani et sphaerici", indem er damit eine Fehlerschätzung bei astronomischen und geodätischen Aufgaben verband. Er schuf also hier die Grundlagen einer Differentialtrigonometrie, die in der Praxis von großer Wichtigkeit wurde.[4])

Zunächst stellt er in drei Lemmen die Sätze $\frac{d \sin x}{dx} = \cos x$, $\frac{d \operatorname{tg} x}{dx} = \sec^2 x$ und $\frac{d \sec x}{dx} = \operatorname{tg} x \sec x$ geometrisch auf[5]) und leitet dann 28 Theoreme für die ebenen und sphärischen Dreiecke ab, indem er immer zwei von drei unabhängigen Dreiecksstücken als

Faktoren. S. Klügel hat in seiner „Analytischen Trigonometrie", Braunschweig 1770, 8°, 96—105 den Beweis Bernoullis zugleich erweitert und vereinfacht; auch bemerkt er in seinem Mathematischen Wörterbuch I, 564, daß De Moivre in den Miscellanea analytica den Satz auf die Zerlegung von $r^{2n} - 2r^n a^n \cos\alpha + a^{2n}$ ausdehnte.

1) In den der Harmonia mensurarum angehängten Opera miscellanea 78—79. — 2) Ebenda 94—96. — 3) Vgl. hierüber E. Hammer, Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie. 2. Aufl. 1897, 547, Anmerk. 2. — 4) A. a. O. 1—22. Hierauf hat schon Cantor III, 2, 412—414 die Aufmerksamkeit gelenkt. — 5) Die Formeln werden in Sätzen ausgesprochen. So z. B. die erste: „Variatio minima cujusvis arcus circularis est ad Variationem minimam Sinus eiusdem arcus ut Radius ad Sinum complementi."

konstant voraussetzt, dem dritten eine unendlich kleine Veränderung (1. Ordnung) beilegt und die hieraus resultierenden Veränderungen der übrigen Stücke studiert. Sind z. B. in dem Dreieck ABC in Fig. 13 $\sphericalangle B$ und Seite AB konstant und wächst BC $(= x)$ um die unendlich kleine Strecke CD $(= dx)$, so geht $\triangle ABC$ in $\triangle ADB$ über und Seite AC $(= y)$ in AD $(= y + dy)$; da man nun bei unendlich kleiner Veränderung (variatio minima) $\sphericalangle CED$ und $\sphericalangle ACE$ als rechte Winkel auffassen muß, so folgt $CD : DE = 1 : \sin DCE$,

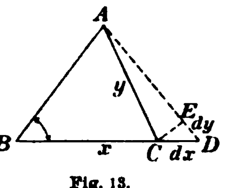


Fig. 13.

oder $\sin DCE = \cos ACB = \frac{DE}{CD} \left(= \frac{dy}{dx}\right)$, oder wie sich Cotes ausdrückt: „Die kleinste Veränderung der zweiten dem gegebenen Winkel anliegenden Seite verhält sich zur kleinsten Veränderung der gegenüberliegenden, wie der Radius zum Sinus des Komplementes des der festen Seite gegenüberliegenden Winkels.“ Das 2. Theorem gibt unter denselben Voraussetzungen die Gleichung $\frac{dA}{dy} = \frac{\operatorname{tg} C}{AC}$ u. s. w.

Nach Aufstellung dieser Theoreme gibt Cotes an, wie dieselben praktisch zu verwenden seien, indem er annimmt, man habe etwa den Fehler einer Größe A zu bestimmen, die von den Größen B, C, D abhängt, so daß der gesuchte Fehler sich aus den bekannten Fehlern dieser Größen zusammensetzt. Dann bestimme man, sagt er, die Fluxion von A nach der Newtonschen Methode (d. h. man differentiiere A), setze dann die gegebenen Fehler statt der Fluxionen der Größen B, C, D und erhält hiermit den Fehler von A. Da aber gewöhnlich nicht die Größen selbst, sondern ihre trigonometrischen Funktionen vorkommen, so bediene man sich zur Bestimmung ihrer Fluxionen der vorausgeschickten drei Lemmen. Ein Beispiel hierzu veranschaulicht die Methode.[1])

§ 3. Die Zyklometrie bis Euler. De Lagnys neue Goniometrie. Tafelberechnungen.

Wir haben im vorigen Kapitel gesehen, daß am Ende des 17. Jahrhunderts durch die Erfindung unendlicher Prozesse, wie der Bildung von Faktorenfolgen, von unendlichen Kettenbrüchen, von konvergenten unendlichen Reihen, neue und praktische Mittel gewonnen worden waren, um das Verhältnis des Kreisumfanges zum Durchmesser beliebig genau zu berechnen. Die Aufgabe der nächsten Zeit war es, die gefundenen Reihen so umzugestalten, daß eine möglichst

1) A. a. O. p. 20. Siehe dasselbe bei Cantor III, 2, 414.

geringe Gliederzahl zu dem fraglichen Zwecke genügte. Dies leistete der uns schon bekannte Astronom John Machin († 1751), der der Untersuchungskommission in dem bekannten Prioritätsstreite[1]) zwischen Newton und Leibniz über die Erfindung der Differentialrechnung angehörte. Seine Methode bestand darin, daß er $\frac{\pi}{4}$ als die Differenz zweier Bögen darstellte, deren Tangenten durch einfache Brüche ausdrückbar sind.[2]) Die Bögen wurden dann mit der Arcustangens-Reihe Gregorys bestimmt. Es sei $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{5}$, dann gibt das Additionstheorem $\operatorname{tg} 4\alpha = \frac{120}{119} = 1 + \frac{1}{119}$ und da $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$, so ist die Tangente von 4α nur um $\frac{1}{119}$ größer als die von $\frac{\pi}{4}$, also auch der zugehörige Bogen nur wenig größer als $\frac{\pi}{4}$, sei demnach $\frac{\pi}{4} = 4\alpha - x$, so folgt $x = 4\alpha - \frac{\pi}{4}$, $\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{tg} 4\alpha - 1}{1 + \operatorname{tg} 4\alpha} = \frac{\frac{120}{119} - 1}{1 + \frac{120}{119}} = \frac{1}{239}$; also hat man $\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239}$, oder durch Einführung der Reihen und Zusammenziehen derselben:

$$\pi = \overline{\frac{16}{5} - \frac{4}{239}} - \frac{1}{3}\overline{\frac{16}{5^3} - \frac{4}{239^3}} + \frac{1}{5}\overline{\frac{16}{5^5} - \frac{4}{239^5}} - \cdots$$

Mit dieser Reihe berechnete er π auf 100 Dezimalen.

Machins Berechnung der Zahl π war ein wesentlicher Fortschritt gegenüber den Bemühungen von Halley[3]) und Abraham Sharp (1699), welche durch direktes Einsetzen der Tangenten von $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{10}$, $\frac{\pi}{8}$ und $\frac{\pi}{12}$ in die Arcustangens-Reihe π auf 13 bis 72 Stellen bestimmten. Die meisten dieser Rechnungen führte der zuletzt genannte Sharp[4]), der gewandteste und unermüdlichste Rechner des 18. Jahrhunderts, aus.

Weiter noch als diese alle aber trieb der Franzose De Lagny die Berechnung von π. Er hatte, wie er sagt[5]), 1682 die Reihe

1) Cantor III, 2, 305 und 364. — 2) Seine Reihe selbst findet sich zuerst veröffentlicht in W. Jones' Synopsis palmariorum matheseos 1706, 8°, p. 263, wo er auch, wie schon erwähnt, die Bezeichnung π zum erstenmal gebraucht. Die Ableitung der Reihe aber wurde erst 1758 von Maseres publiziert, der in seiner „Dissertation on the use of the Negative Signe in Algebra" einen eigenen Beweis mitteilte und dann Machins Ableitung beifügte. Vgl. auch Maseres, Scriptores logarithmici III, 1796. Einleitung p. VII und 157—164. — 3) Siehe ebenda III, 139 ff. — 4) A. Sharp (1651—1742) ist in Little Horton bei Bradford geboren, war zuerst Handlungslehrling, dann Schulmeister, Buchhalter, Gehilfe des Astronomen Flamsteed und zuletzt Privatmann in seiner Vaterstadt. Die Resultate seiner Rechnungen (vgl. Maseres, Script. log. III, 139—154) sind in Sherwins Mathematical tables 1705, p. 59, 1706 etc. veröffentlicht. — 5) Mémoires de l'Académie de Paris. Année 1719, 144.

Gregorys für den Arcustangens selbständig gefunden und berechnete mit ihr, wie Halley und Sharp von $\frac{\pi}{6}$ ausgehend, indem er immer ein positives und das darauf folgende negative Glied vereinigte, π auf 127 Dezimalen[1]; was aber weit wichtiger ist, und von den Historikern bisher übersehen wurde, ist der Umstand, daß Lagny in diesem Aufsatze (p. 141) bereits den Satz ausspricht, daß, wenn die Tangente eines Bogens eine rationale Zahl ist, der Bogen selbst irrational sein muß, ein Satz, der später Lambert zum Ausgangspunkt für seinen Beweis der Irrationalität von π diente. Der von Lagny hierfür angedeutete Beweis ist allerdings nicht viel wert. Das Gleiche gilt von einem geometrischen Beweise für die Unmöglichkeit der Quadratur des Kreises, den Saurin (1659—1737) in den Memoiren der Pariser Akademie von 1720 veröffentlichte.

In Deutschland wurde im Jahre 1726 das Problem der Herstellung rasch konvergenter Reihen zur Berechnung der Zahl π von dem uns schon bekannten F. C. Maier aufgenommen[2]), welcher aus der von ihm berechneten Reihe für die Sehne vielfacher Bögen (S. 74) die Arcus-Reihe $a + \frac{a^3}{3!\, d^2} + \frac{3^2 a^5}{5!\, d^4} + \frac{3^2 \cdot 5^2 \cdot a^7}{7!\, d^6} + \cdots$ (a = Sehne) entwickelte, die ihm für $a = \frac{d}{2} = r$, $\frac{\pi}{3} = 1 + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 2^2} + \frac{3}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 2^4} + \frac{5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 2^6} + \cdots$ ergab; 5 Glieder derselben liefern bereits 3,1415 und jedes weitere Glied vermehrt die Summe um eine Dezimale.

Auf die Kreismessung beziehen sich auch de Lagnys Arbeiten über Goniometrie, welche in den Jahrgängen 1724, 1725, 1727 und 1729 der Pariser Mémoires erschienen. Der Name Goniometrie, der hier zum erstenmal auftritt, bedeutete bei Lagny übrigens nicht, was wir heute darunter verstehen, sondern de Lagny faßte durch ihn die verschiedenen Messungsmethoden eines Winkels zusammen. Solcher Methoden unterscheidet er vier: 1) Die rein geometrische Goniometrie, bei welcher man nur den Zirkel, d. h. den Kreisbogen zur Messung des Winkels anwendet, 2) die rein analytische Goniometrie, welche lehrt, dem analytisch bestimmten Winkel sich ohne Grenze anzunähern. So ist z. B. durch die Zahlen 3, 4, 5 für die Seiten eines ebenen rechtwinkligen Dreiecks ein Winkel bestimmt, den man aus diesen Zahlen mittelst der unendlichen Reihen so genau

1) Die Rechnung, von der er sagt, sie sei mit äußerster Leichtigkeit auszuführen, verspricht er später zu geben, was aber nicht geschah. — 2) Comment. Acad. Petrop. III, 61. An die hier verwendete Methode hat Euler in einem Briefe an Goldbach (Correspondance mathém. von Fuß, St. Petersburg 1843, 8°, I, 46) einige Bemerkungen angeknüpft.

berechnen kann als man will[1]), 3) die rein arithmetische oder trigonometrische Methode; darunter versteht er die Berechnung des Winkels mittelst einer trigonometrischen Tafel, und endlich 4) eine aus 2) und 3) zusammengesetzte Methode der Goniometrie, mit welcher man einen Winkel bis auf Terzen genau bestimmt.

Um mit der ersten Methode die Größe eines graphisch gegebenen Winkels α in Graden, Minuten und Sekunden zu bestimmen, entwickelt er, in moderner Ausdrucksweise, den Quotienten $\frac{180^0}{\alpha}$ in den Kettenbruch $q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cdots}}$, indem er die Quotienten durch Abtragen des gegebenen Bogens auf dem Bogen 180° so lange bestimmt, bis ein so kleiner Rest bleibt, daß er vernachlässigt werden kann. Ist dann der Wert des Kettenbruches $= w$, so ist $\frac{180^0}{w} = \alpha$.[2])

Die zweite Methode besteht darin, den Winkel mittelst der Tangente aus der Arcustangens-Reihe zu bestimmen. Ist der Winkel γ des bei A rechtwinkligen Dreiecks ABC mit den Seiten $a > b > c$, $a < 2c$ zu bestimmen, so gibt der Tangentensatz $\operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{2} = \operatorname{tg}(45^0 - \gamma) = \frac{b-c}{b+c}$ und hieraus mittelst der Reihe $\sphericalangle\, 45^0 - \gamma$ und γ selbst, so genau als man will[3]); ist aber $a > 2c$, so setzt man $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{a-b}{b}$ und verfährt ebenso. Die dritte und vierte Methode bedürfen keiner weiteren Erläuterung.

Im zweiten Mémoire von 1725 zeigt Lagny, wie man einen Bogen, der im Gradmaße gegeben ist, mit beliebiger Genauigkeit ins Längenmaß umrechnen kann, indem er ihn zwischen zwei rationale Brüche mit den Zählern 1 und Nennern, die sich nur um eine Einheit unterscheiden, einschließt. So z. B. liegt arc 1′ zwischen $\frac{1}{3437}$ und $\frac{1}{3438}$. Die Rechnung wird für 1′, 1″ u. s. w. bis 1^{X} ausgeführt! Am Schlusse der Abhandlung bemerkte er noch, daß es am rationellsten sei, den

1) Er gibt diesen Winkel auf $36^0\ 52'\ 11''\ 37'''\ 53^{\text{IV}}\ 29^{\text{V}}\ 24^{\text{VI}}\ 29^{\text{VII}}\ 55^{\text{VIII}}\ 10^{\text{IX}}\ 2^{\text{X}} +$, oder $3^{\text{X}} -$, so daß der Unterschied kleiner ist als 1 : 544195584000000000000 des rechten Winkels. — 2) Er führte hierzu folgendes Beispiel an (Mémoires de l'Ac. 1724, 248 ff.). Durch Abtragen eines Winkels erhält man $\frac{180^0}{\alpha} = 4 + \frac{r_1}{\alpha}$, $\frac{\alpha}{r_1} = 1 + \frac{r_2}{r_1}$, $\frac{r_1}{r_2} = 5 + \frac{r_3}{r_2}$, $\frac{r_2}{r_3} = 2$; also $q_1 = 4$, $q_2 = 1$, $q_3 = 5$, $q_4 = 2$, und damit $w = \frac{63}{13}$. Somit ist $\alpha = \frac{180^0 \cdot 13}{63} = 37^0\ 8'\ 34''\frac{2}{7}$. — 3) Hier wird der Tangentensatz statt der Tangente selbst genommen, um einen kleineren Bruch und damit eine rascher konvergente Reihe zu erhalten.

Quadranten in 30°, einen Grad in 32′, eine Minute in 32″ u. s. w. zu teilen „c'est le sujet d'une dissertation préliminaire d'une Trigonométrie Françoise ou réformée".[1]) Er plante die Abfassung einer solchen Trigonometrie, was aber unterblieb.

Im III. Mémoire (1727) kommt Lagny noch einmal auf die Arcustangens-Reihe $z - \frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{5}z^5 - \frac{1}{7}z^7 + \cdots$ zu sprechen, schreibt für z $\frac{1}{r+1}$, faßt je ein positives und ein negatives Glied zusammen und bestimmt das allgemeine Glied der entstehenden Reihe in der Form $\frac{(4a+3)r^2 + (8a+6)r + 2}{(4a+1)(4a+3)(r+1)^{4a+3}}$.[2]) Läßt man hier, sagt er, a von 0 bis ∞ alle Werte durchlaufen, so erhält man alle Glieder der Reihe, und außerdem gibt er noch die Grenze der Annäherung an, die man bekommt, wenn man bei einem bestimmten Gliede abbricht. Aus dem Umstande endlich, daß der Bogen sich durch eine unendliche, nach der Tangente fortschreitende Reihe darstellt, oder wie er sich ausdrückt, durch eine Gleichung von unendlich hohem Grad, glaubt er sich[3]), allerdings mit Unrecht, zu folgenden Schlüssen, welche das früher (S. 81) von uns Mitgeteilte näher ausführen, berechtigt: „Wenn das Verhältnis des Radius zur Tangente eines Bogens entweder in Zahlen oder durch eine endliche, bestimmte numerische Gleichung gegeben ist, so ist es unmöglich eine numerische Gleichung zu finden, welche das Verhältnis dieses Radius und dieser Tangente zu dem entsprechenden Bogen ausdrückt. Daher ist es auch unmöglich, dieses Problem geometrisch durch Schnitt zweier geometrischer (algebraischer) Kurven zu lösen. Ebenso ist es, wenn das Verhältnis des Radius zum Bogen durch irgend welche Zahlen oder durch irgend welche numerische Gleichung gegeben ist, unmöglich, die diesem Bogen entsprechende Tangente numerisch oder durch irgend welche numerische Gleichung zu bestimmen"; und als Korollar wird noch beigefügt: „Nur die Probleme, welche sich durch endliche und bestimmte analytische Gleichungen darstellen lassen, können durch Schnitte algebraischer Kurven gelöst werden. Also ist die Rektifikation der Kreisbögen durch den Radius und durch die Tangente geometrisch unmöglich, weil sie analytisch unmöglich ist."

Wir müssen in diesen Sätzen, die Lagny allerdings nicht exakt beweisen konnte, gewissermaßen Vorahnungen der späteren Beweise für die Irrationalität und die Transzendenz der Zahl π erkennen.

Gleichzeitig mit der immer mehr fortschreitenden Ausbildung der

1) A. a. O. 291 und Mémoires 1729, 14 ff. — 2) Ich führe dies hier deswegen ausdrücklich an, weil die Aufstellung des allgemeinen Gesetzes der Reihe eine für die damalige Zeit ganz exzeptionelle Präzision verrät. — 3) A. a. O. p. 124—125.

analytischen Methoden der Trigonometrie trat auch eine Reform in dem Berechnungsverfahren trigonometrischer Tabellen ein. Wir sahen, daß Newton schon in dem Briefe vom 24. Oktober 1676 darauf hinwies, wie man die neuen Reihen der trigonometrischen Funktionen zur Herstellung von Tafeln verwenden könne, und am Schlusse seiner Ausführungen bemerkt er, daß man zur Bestimmung der Sinus der Zehntel- und Hundertstel-Grade eine andere Methode, als die direkte Reihenberechnung mit Vorteil verwenden könne. Damit hatte er offenbar ein Interpolationsverfahren im Auge, das er, wie wir schon früher (S. 52) sahen, in seinen Prinzipien kurz auseinandersetzte und dann in einem „Methodus differentialis" überschriebenen Aufsatze, der aber erst 1711 von W. Jones (1675—1749)[1] mit Erlaubnis des Autors veröffentlicht wurde, näher besprach. Das Verfahren, welches heute noch unter Newtons Namen bekannt ist, beruht darauf, durch die Endpunkte einer Reihe äquidistanter Ordinaten eine parabolische Kurve zu legen — ein Gedanke, den übrigens vor Newton schon James Gregory[2]) hatte, der damit die später nach Simpson benannte Regel zur Ausführung näherungsweiser Quadraturen fand. Auch Newtons Zweck war zunächst kein anderer, er erkannte aber sofort auch die Verwendbarkeit seiner Methode zur Tabellenberechnung.[3]) In den Prinzipien gab er hierfür zwei Schlußformeln, im Methodus differentialis aber zeigte er nur, wie man durch successive Differenzenbildung die unbestimmten Koeffizienten der parabolischen Kurvengleichung n. Grades finden kann, wenn $n+1$ Paare zusammengehöriger Abszissen- und Ordinatenwerte gegeben sind[4]); seine Methode unterscheidet sich daher wenig von jener Ozanams. Übrigens hatte schon vor der Veröffentlichung des „Methodus differentialis" R. Cotes eine 1707 verfaßte Ableitung der Newtonschen Methode seinen Zuhörern (1709) vorgetragen und in einer Abhandlung „De methodo differentiali Newtoniana" niedergelegt; jedoch wurde dieser Aufsatz erst nach seinem Tode im Anhange zur Harmonia mensurarum von Smith herausgegeben.

Aber Newton hat nicht nur diese unter seinem Namen allgemein bekannte Methode angegeben, sondern noch vier allgemeine Formeln entwickelt, welche die sogenannte Interpolation aus der Mitte in ihrem vollen Umfang behandeln. Da dieselben jedoch für die uns hier allein interessierende Tafelberechnung nicht von Bedeutung sind, gehen wir nicht weiter darauf ein.[5])

---

1) Dictionary of national Biographies XXX, 173. — 2) James Gregory, Exercitationes geometricae, London 1668, vgl. G. Heinrich in Biblioth. math. 3. Serie, I, 1900, 90—92. — 3) Siehe S. 66 Anm. 1. — 4) Ausführlicher bei Cantor III, 2, 372—375. — 5) Eine genauere Auseinandersetzung über die

Was Newtons bereits erwähnte Bemerkung zur Tafelberechnung mittelst unendlicher Reihen anlangt, so hat er selbst solche Berechnungen nicht durchgeführt; dies geschah erst durch den unermüdlichen Abraham Sharp zu Beginn des 18. Jahrhunderts. In einem von Maseres im III. Bande der „Scriptores logarithmici" (129—138) mitgeteilten Auszuge aus Sharps Rechnungen werden mehrere von diesem angewandte Methoden angegeben. Zunächst macht er die Bemerkung, daß die Sinus- und Cosinusreihen für Winkel, welche nahe am Beginn oder am Ende des Quadranten liegen, am besten konvergieren, und zeigt dann, wie man mit der direkten Berechnung dieser Funktionen aus den Reihen für Winkel von 0^0 bis 30^0 und von 60^0 bis 90^0 ausreicht, um dieselben wenigstens in Intervallen von $5'$ für die Winkel von 30^0 bis 60^0 durch bloße Subtraktion zu erhalten. So gibt z. B. $\cos 29^0\, 55' = \sin 60^0\, 05'$ vermindert um $\sin 0^0\, 5'$ den $\sin 59^0\, 55'$, $\sin 89^0\, 55' - \sin 29^0\, 55' = \sin 30^0\, 05'$ [1]) u. s. w. Ferner lehrt er, wie man aus $\sin 5'$ die Sinus beliebiger Vielfachen bestimmen kann, zeigt, daß man die Winkel des mittleren Quadrantendrittels mit der Formel $\sin(30^0 - \alpha) + \sqrt{3} \sin \alpha = \sin(30^0 + \alpha)$ aus denen des ersten Drittels oder mittelst $\sqrt{3} \sin(60^0 + \alpha) - \sin(90^0 - \alpha) = \sin(30^0 + \alpha)$ aus denen des letzten Drittels findet, u. s. w. Will man endlich die Sinus von Winkeln, die von Minute zu Minute fortschreiten, bestimmen, so ist es zweckmäßiger, $\sin 1'$ direkt mit der Reihe als durch ein Näherungsverfahren zu berechnen! Nach Maseres' Angabe[2]) wurden Sharps sämtliche Rechnungen von Gardiner in einer Neuauflage von Sherwins Logarithmentafel 1741 publiziert. Er selbst veröffentlichte nur pseudonym (A. S. Philomath) im Jahre 1741 eine „Geometry improved", London. 4°.[3])

Die eben erwähnte Tafelsammlung Sherwins erschien zum erstenmal im Jahre 1705 unter dem Titel Mathematical Tables . . . with their Construction and Use bey Mr. Briggs, Mr. Wallis, Mr. Halley . . Mr. Abr. Sharp", während das Vorwort mit Sherwins Namen

---

ersten, die Interpolation betreffenden Arbeiten findet sich in unserer Abhandlung in Biblioth. math. 1901, II, 86—96. Hieraus führen wir nur an, daß zwei der Newtonschen Formeln bisher irrtümlicherweise Jakob Stirling zugeschrieben wurden, der 1730 eine größere Schrift „Methodus differentialis, sive tractatus de summatione et interpolatione serierum" schrieb, die die Quelle für alle späteren Arbeiten über Interpolation wurde.

1) Man beweist dies leicht mittelst der Formel $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$. — 2) A. a. O. Einleitung VI. — 3) Poggendorff, Biogr. liter. Handwörterbuch, II, 917. In dieser Geometrie sind nach Angabe Delambres (Hist. del' Astro. mod. II, 91) Sharps Methoden zur Herstellung der Tafeln eingehend erörtert.

unterzeichnet ist. Die zahlreichen Ausgaben, von denen die aus dem Jahre 1742 von W. Gardiner besorgte die beste sein soll, laufen durch das ganze 18. Jahrhundert. Sie enthalten Tafeln der Sinus, Tangenten und Sekanten, sowie ihrer Logarithmen auf 7 Dezimalen und zwar für jede Bogenminute.[1])

Außer Sherwin-Gardiners vielbenützter Tafelsammlung erwähnen wir noch Dodsons „The calculator", London 1747, 8°, eine sehr praktische Sammlung in mäßigem Umfang (174 S.), welche die verschiedenartigsten Hilfstafeln enthielt, wie z. B. eine Tafel der Bogenmaße für alle Grade, für alle Minuten, Sekunden und Terzen (7stellig), die Sinus versus der Bögen und die zugehörigen Kreissegmente für alle 15′ des Quadranten, die ersten 9 Vielfachen von 12 Konstanten wie π, $\frac{1}{\pi}$, $\frac{\pi}{4}$ u. s. w. auf 7 Stellen, 7stellige Zahlenlogarithmen, Antilogarithmen, Logarithmen der Sinus und Tangenten, und die ersten 1000 Vielfachen des Modulus 0,43429 . . . u. dgl. m.[2])

§ 4. Elementare Trigonometrie.

Überblickt man die trigonometrische Literatur in der ersten Hälfte des 18. Jahrhunderts, so erkennt man, daß es immer mehr nötig wird, zwischen Originalarbeiten zu unterscheiden, welche, wie schon in der zweiten Hälfte des 17. Jahrhunderts in den sich mehr und mehr verbreitenden Zeitschriften der Akademieen und gelehrten Gesellschaften niedergelegt wurden, und den reproduktiven Arbeiten, die die neuen Resultate mehr oder weniger schnell aufgriffen und teils zu rascher Orientierung in Sammelwerken, teils zu pädagogischen Zwecken in Lehrbüchern vereinigten. Da wir in erster Linie den Fortschritt unserer Wissenschaft im Auge haben, so müssen wir uns vornehmlich mit der ersteren Gattung von Schriften beschäftigen und können die Literatur der Lehrbücher nur insoweit berücksichtigen, als sie zu diesem Fortschritte beitrug oder ein Bild davon gibt, wie rasch und inwieweit die neuen Errungenschaften allgemeiner bekannt wurden.

Da ist es nun zunächst Newtons fundamentales Werk, die „Arithmetica universalis"[3]), und zwar darin das Kapitel über die arithmetische

1) Genaueres über die verschiedenen Ausgaben findet man bei Glaisher a. a. O. p. 129—131. — 2) Vgl. eine genauere Angabe bei Glaisher a. a. O. p. 95. — 3) Dasselbe erschien zuerst 1707 von William Whiston (1667—1752), Newtons Nachfolger im Lehramte, wie es scheint, gegen seinen Willen herausgegeben, wurde dann 1722 mit mannigfachen Verbesserungen von Newton abermals aufgelegt und 1732 in Leyden von G. J. s'Gravesande zum drittenmal publiziert. Wir zitieren nach der letzten Auflage.

Behandlung geometrischer Probleme, welches unsere Aufmerksamkeit fesselt. Newton löst hier eine Reihe von Dreiecksaufgaben durch Anwendung algebraischer Rechnung und gelangt dabei zu Formeln, die teils nach Inhalt und Form, teils in der angewandten Schreibweise als neu zu bezeichnen sind.

So findet sich bei der Lösung des X. Problems (p. 104), aus der Basis AB, der Summe der Seiten $AC + BC$ und dem Winkel C an der Spitze des Dreiecks ABC die Seiten und die Winkel zu bestimmen, bereits eine Formel angewendet, die bisher dem Astronomen Mollweide (1774—1825) zugeschrieben wurde und dessen Namen trägt. Sie lautet in Newtons Schreibweise $AB : (AC + BC) = \text{sin. ang. } ACE : \text{sin. ang. } AEC$, wobei E auf der Basis durch die Halbierungslinie des Winkels C ausgeschnitten wird. „Zieht man dann, heißt es weiter, von dem $\sphericalangle AEC$ und seinem Komplemente BEC $\frac{1}{2} \sphericalangle C$ ab, so bleiben die Winkel B und A übrig.“

Fig. 14.

Führen wir unsere Bezeichnungsweise ein und ersetzen $\sphericalangle AEC$ durch $B + \frac{C}{2}$, so kommt (Fig. 14): $c : (b + a) = \sin \frac{C}{2} : \sin \left(B + \frac{C}{2}\right)$, oder, was dasselbe ist: $c : (b + a) = \sin \frac{C}{2} : \cos \frac{A - B}{2}$.[1])

Wichtig sind noch die Probleme XI und XII: „Aus drei Seiten eines ebenen Dreiecks die Winkel und den Flächeninhalt zu bestimmen, und die Segmente der Basis, sowie die Höhe zu berechnen“ (p. 105—107). Zunächst setzt hier Newton $AB = a$, $AC = b$, $BC = c$ und findet Winkel A aus dem Satze: „Ut $2ab$ ad medium proportionale inter $\overline{a + b + c} \times \overline{a + b - c} + \overline{a - b + c} \times \overline{- a + b + c}$, ita radius ad sinum anguli A“, d. h. wenn wir a mit c vertauschen:

$$\sin A = \sqrt{(a + b + c)(c + b - a)(c - b + a)(- c + b + a)} : 2cb,$$

eine Formel, die hier zum erstenmal auftritt. Durch ähnliche Sätze bestimmt er auch $\text{sinvers}\, A = \frac{(a + c - b)(a - c + b)}{2bc}$, $\operatorname{tg} \frac{A}{2}$, $\operatorname{ctg} \frac{A}{2}$ und $\sin \frac{A}{2}$, sowie $\cos \frac{A}{2}$, welche wohl bekannt, aber nicht in dieser Form gegeben waren. Die Heronsche Dreiecksformel für den Inhalt des Dreiecks endlich wird genau in der uns geläufigen Weise geschrieben. Aber im XII. Problem gibt er noch eine andere Darstellung dieser

1) In dieser Form gibt sie Mollweide. Zach, Monatliche Korrespondenz XVIII, 396; bei Newton ist also nur $\sin (AEC)$ nicht durch $\cos \left(\frac{A - B}{2}\right)$ ersetzt! An Newtons Lösung anschließend, hat Graf Herberstein in den Acta Erud. 1711, 324—325 eine etwas andere aber keineswegs bessere gegeben.

Formeln, indem er den Dreiecksumfang einführt, wie das früher schon Caswell getan hatte (S. 47—48).

Indem wir noch eine neue Ableitung der Teilungsgleichungen, die Newton in Problem XXIX (p. 125—126) mitteilt, die sich aber schon in seinem Briefe vom 24. Oktober 1676 an Oldenburg findet, erwähnen, wenden wir uns zur Mitteilung einiger Ergänzungen trigonometrischer Lehren, welche Christian von Wolf (1679—1754) um jene Zeit gab. Wolf[1]) war Philosoph und Mathematiker, lehrte seit 1703 in Leipzig, 1707—1723 in Halle, mußte aber 1723 wegen religionswidriger Bestrebungen die preußischen Lande verlassen. Durch Friedrich den Großen 1740 wieder zurückberufen, wurde er zum Freiherrn ernannt und lehrte bis zu seinem Tode in Halle. Während seines ersten Aufenthaltes daselbst verfaßte er 1710 „Anfangsgründe aller mathematischen Wissenschaften“ in 4 Bänden, die eine wiederholte Auflage erfuhren. Ein Auszug aus ihnen fand 1717—1772 zehn Auflagen und war das vielgebrauchteste Lehrbuch jener Zeit in Deutschland. Außerdem schrieb er für gelehrte Kreise die „Elementa matheseos universae“ (1713—1743)[2]) und ein „Mathematisches Lexikon“. Im 4. Bande der Anfangsgründe (1711) spricht Wolf in der Einleitung zu den Sinus- und Tangententafeln von einer Vereinfachung der Neperschen Regel für das rechtwinklig sphärische Dreieck, teilt sie jedoch erst in der Ausgabe von 1717 mit. Der von ihm vorgeschlagene Wortlaut[3]) entspricht genau jenem, der noch heute bei uns im Gebrauch ist, so daß wir annehmen dürfen, derselbe stamme von Wolf; er wurde durch die große Verbreitung, die die „Elementa“ fanden, allgemein bekannt. Den ersten Teil jener Regel, die er auch logarithmisch ausspricht, beweist er mit alleiniger Verwendung des Sinussatzes, den zweiten Teil mit der Tangentenregel von Abû'l Wafâ. Sonst ist von seiner Trigonometrie nur anzuführen, daß er sich der Bezeichnungen Sinus, Cosinus, Tangens und Cotangens bedient und in den Proportionen, in denen er alle Sätze schreibt, die nicht nur in Worten angegeben werden, verschiedene Abkürzungen verwendet. Die Formelschriften der Engländer kennt er

---

1) Vgl. Cantor III, 2, 270. — 2) 1743 erschien noch eine Editio novissima zu Genf. — 3) In der Ausgabe von 1717 ist im ersten Teile die ebene, im dritten Teile die sphärische Trigonometrie behandelt (p. 137—172). Seite 144 und 152 stehen die beiden Teile der Neperschen Regel: „Der Sinustotus mit dem Cosinus des mittleren Teiles ist gleich den Sinibus der abgesonderten und den Cotangentibus der anliegenden, dabei muß man aber merken, daß man im sphärischen Triangel für die Seiten AB und BC (Katheten) die Komplemente zu 90°, in den geradlinigen aber vor die Sinus und Tangentes die Seiten selber annimmt.“

ebensowenig, wie die 4 Neperschen Analogieen und den Halbwinkelsatz. Auch ist in den spätern Ausgaben sowohl der „Anfangsgründe“ als auch der „Elementa matheseos“ keine bemerkenswerte Vermehrung der trigonometrischen Hilfsmittel eingetreten, obwohl sich, wie wir bald sehen werden, dem Bearbeiter so umfang- und einflußreicher Hilfsbücher manches Neue in der Zwischenzeit dargeboten hätte. Übrigens zeichnen sich Wolfs Schriften durch übersichtliche und leichtfaßliche Darstellung aus, worin jedenfalls die Beliebtheit derselben ihre Begründung findet.

Außer seinen umfangreichen Werken hat Wolf auch noch einige Abhandlungen in den Acta Erud. veröffentlicht. Wir weisen nur auf eine hin[1]), in welcher er ähnlich wie schon Cavalieri (S. 37) eine trigonometrische Methode angibt, aus den Logarithmen zweier Zahlen den Logarithmus ihrer Summe oder Differenz zu finden. Ist $\log a$ und $\log b$ gegeben und $\log(a+b)$ gesucht, so setze man in dem bei B rechtwinkligen $\triangle ABC$ $AB = \sqrt{a}$, $BC = \sqrt{b}$, dann ist $AC = \sqrt{a+b}$ und $\log \operatorname{tg} A = \frac{1}{2}\log b - \frac{1}{2}\log a$. Schlägt man zu $\log \operatorname{tg} A$, $\log \sin A$ in der Tafel auf, so folgt $\log \sin A = \frac{1}{2}\log b - \frac{1}{2}\log(a+b)$, also $\log(a+b) = 2\log \sin A + \log b$. Ebenso kann man $\log(a^m + b^m)$ aus $\log a^m$ und $\log b^m$ bestimmen. Ähnlich erhält man für $\log(a-b) = 2\log\cos C + \log a$, wenn man $AC = \sqrt{a}$, $AB = \sqrt{b}$ setzt.

Auf dem Standpunkte der „Elementa“ Wolfs stehen mehr oder weniger alle Lehrbücher, die in jener Zeit erschienen, so z. B. Johann Friedrich Weidlers (1691 oder 1692—1755) „Institutiones mathematicae“, Vitembergae 1718, 8°, ein Werk, das ebenfalls sehr verbreitet war und noch 1750 und 1784 vermehrte Neuauflagen erfuhr.[2]) Es bietet nichts Bemerkenswertes, indem selbst in den spätern Auflagen nur längst bekannte Dinge reproduziert sind und die alte schwerfällige Schreibweise beibehalten ist. Noch mehr gilt dieses Urteil von den „Institutionum mathematicarum libri tres“, Viennae 1714, 4°, des Jesuiten Ernesto Vols, die sich noch durch besondere Unübersichtlichkeit auszeichnen, und auch J. B. Wiedeburgs (1687—1766) „Einleitung zu den mathematischen Wissenschaften“ von 1726 und 1735, sowie seine „Institutiones mathematicae“ von 1718, wie endlich Johann Andreas Segners (1704—1777) „Elementa Arithmeticae et Geometriae“ von 1739 bewegen sich, was Trigonometrie anlangt, nur in den alten ausgetretenen Geleisen. Des uns

---

1) Acta Erud. 1716, p. 257 ff. Er führt hier an, daß seine Regel einfacher sei, als eine von Muschelius de Moschau in Ephemeridibus Academiae Leopoldinae Dec. III. A. IV, p. 102 gegebene. — 2) 1727 erschien sogar eine schwedische Übersetzung. Vgl. Bibliotheca math. 1886, 93—94.

schon bekannten Petersburger Akademikers Jakob Hermann „Abrégé des Mathématiques pour l'usage de sa Majesté Impériale de toutes les Russies", t. I, Petersbourg 1728, enthält nur eine ganz kurze ebene Trigonometrie und des dänischen Astronomen Peter Horrebow (1679—1764) „Elementa matheseos", Hafniae 1732 und 1740, in welchen sich ebenfalls eine ebene Trigonometrie findet, liefern nur das eine Bemerkenswerte, daß daselbst der Tangentensatz unter Einführung jenes Hilfswinkels umgeformt wird, den wir bei Thomas Streete (S. 44) fanden.

Ähnlich stand es in der ersten Hälfte des 18. Jahrhunderts auch in Frankreich und Italien. In Frankreich wurden noch Dechales' Cours und Ozanams Trigonometrie fleißig benützt, und die „Nouveaux traités de trigonométrie rectiligne et sphérique" von Deparcieux, die 1741 in einem dicken Quartbande erschienen, bieten einen einzigen halbwegs neuen Satz. Es ist dies unsere Formel:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{1}{\sin(s-a)} \cdot \sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s}},$$

die aber, wie alle daselbst angegebenen Sätze, nur in Worten ausgesprochen wird und zwar noch in Form der zwei Proportionen: $\sin s : \sin(s-c) = \sin(s-b)\sin(s-a) : x^2$ und $\sin(s-a) : r = x : \operatorname{tg}\frac{A}{2}$. Deparcieux benutzt nicht einmal die Worte Cosinus und Cotangens, geschweige denn abkürzende Bezeichnungen oder gar Formeln. Wertvoll waren nur die dem Werke angehängten siebenstelligen Tafeln für Sinus, Tangens und Secans für alle Minuten und die achtstelligen Tafeln der Logarithmen der Sinus und Tangenten für Winkel von 10′ zu 10′. Beigegeben ist noch eine ausführliche trigonometrische Behandlung der Gnomonik. Wenig mehr bietet des Professors Dominique François Rivard (1697—1778) Werk: „Trigonométrie rectiligne et sphérique", Paris 1750 in 8° und 1757, dem eine umfangreiche Tafelsammlung unter dem Titel „Tables de sinus, tangentes et secantes et de leurs logarithmes" 1743 vorherging. Er verwendet zwar die vier Grundfunktionen und schreibt dafür S, cos, T, cot, aber die Darstellung ist noch völlig die alte, die alle Sätze in Worten angibt und nur in Proportionen rechnet; und obwohl schon 1748 Eulers „Introductio in Analysin infinitorum" erschienen war, weiß sich Rivard doch mit den Funktionen der Winkel, die einen Quadranten überschreiten, noch keineswegs abzufinden.

Ebensowenig Rühmenswertes können wir über den „Cours de mathématique" von Camus[1]) berichten, und der Umstand, daß dieses

1) Angemerkt mag hier werden, daß sich im zweiten Teile des vierbändigen Werkes eine Hilfstafel zur Berechnung der Logarithmen der Sinus auf 13 Stellen befindet.

Werk von 1750 ab eine Reihe von Auflagen erlebte (z. B. 1768 die 4.), zeigt, wie wir gleich hier bemerken wollen, daß Eulers Arbeiten nur langsam zur Erhöhung des allgemeinen Niveaus trigonometrischer Kenntnisse in Frankreich beitrugen.

In Italien stand die „Universalis Trigonometria" (Bologna 1705 in 8°) des Bologneser Professors Gemminiano Rondelli (1652–1735) noch völlig auf dem Standpunkte Cavalieris und wurde nur verfaßt, da des letzteren Schriften vergriffen waren. Da das Werk aber noch 1760 und 1793 Neuauflagen erfuhr, ist wohl der Fortschritt in Italien noch langsamer gewesen, als in den Ländern der deutschen Zunge. Dieses Urteil wird bestätigt durch die Trigonometria sphaerica" des römischen Jesuiten Roger Joseph Boscovich (1711—1787), die 1745 in 8° in Rom erschien. Auch hier finden sich noch die Definitionen des Rhäticus für die 6 trigonometrischen Funktionen, und den allbekannten stets in Worten angeführten Sätzen werden nur zwei neuere zugesellt, denen wir übrigens in der englischen Literatur bei Thomas Baker begegneten (S. 48, dritte und vierte Gleichung). Ebensowenig bringen Boscovichs „Elementa matheseos", Romae 1752, 8°, etwas Neues, ja sie enthalten sogar den falschen Satz, daß die sämtlichen Funktionen für Winkel im zweiten Quadranten denen der entsprechenden spitzen Winkel gleich seien. Dagegen müssen wir auf eine graphische Auflösung der 6 sphärischen Fundamentalaufgaben hinweisen, die er in seiner „Trigonometriae sphericae constructio", Romae 1737 in 4° veröffentlichte. Die daselbst befolgte Methode hängt mit jener des Analemmas eng zusammen, vereinfacht jedoch dieselbe nicht unwesentlich.[1])

In England erschien um jene Zeit ebenfalls eine Menge von Schriften, die teils die Trigonometrie allein behandelten, teils als Kompendien der gesamten Mathematik Kapitel über Trigonometrie enthielten. Aber sie alle scheinen Oughtreds Fortschritte kaum zu erreichen, geschweige denn zu überbieten. Leider kennen wir John Goodens[2]) „Compendium trigonometriae planae et sphaericae" in 8° und 12°, Lüttich, John Wittys „Tractatus de sphaera", 1714, des Astronomen John Keills „Elementa trigonometriae planae et sphaericae", Oxford 1715, John Wilsons „Principia trigonometriae succincte demonstratae" Lugd. Batav. 8°, 1718, und endlich John Hodgsons „Systema matheseos", Londini 1723, 4°, nur dem Namen nach, dagegen zeigt uns der Umstand, daß ein Buch wie William Hawneys „The doctrine of plane and spherical Trigonometry" noch 1725

1) Vgl. hierüber unsere Abhandlung „Zur Geschichte der Trigonometrie im 18. Jahrhundert", Bibliotheca math. II, 1901, 106—107. — 2) Er lebte als Jesuit in Belgien und starb 1720. Quételet Histoire etc. 275.

erscheinen konnte (London in 8^0), daß wenigstens die Lehrbücher in der Tat Oughtreds Standpunkt noch nicht einmal erreicht hatten. Denn in diesem umfangreichen Buche finden sich selbst die Bezeichnungen für die Kofunktionen, sowie eine abkürzende Schreibweise der Funktionen nur ab und zu verwendet, von einer Formelschreibung überhaupt nicht zu reden. Von dem eisernen Bestande der alten Trigonometrie verwendet Hawney außer den bekannten geometrisch gewonnenen Lehrsätzen auch noch die Orthogonalprojektion der Kugel auf die Ebene eines größten Kreises und zeigt, wie man mit ihr graphisch die Bestimmung der sphärischen Dreiecke vollziehen kann, und in einem Anhange gibt er, jedoch ohne jede Begründung, Regeln zur „arithmetischen" Auflösung ebener Dreiecke ohne Tafelbenützung, welche auf den Gebrauch der uns längst bekannten Formel des Snellius hinauskommen (I. Tl., S. 242). Nur einen englischen Schriftsteller vermögen wir anzuführen, der wie Oughtred und Wallis von einer abkürzenden Bezeichnungsweise ausgedehnten Gebrauch machte, es ist dies William Jones, dessen „Synopsis palmariorum matheseos" wir schon früher (S. 80, Anm. 2) nannten. In diesem kleinen 1706 erschienenen Büchlein gibt er eine Übersicht der meisten bis dahin bekannten goniometrischen Formeln und Reihen, indem er Sinus $= s$, Tangens $= t$, Secans $= f$, Sinusversus $= v$ schreibt und die komplementären Funktionen durch Beifügung eines Accentes bezeichnet. Später (1747) kam er in einem in den P. T. (No. 483) abgedruckten Briefe an Martin Folkes (1690—1754) noch einmal auf die Goniometrie zurück und gab daselbst eine sehr übersichtliche „Table of the Relations of Goniometrical Sines", aus welcher er eine Menge von Formeln erschloß, von denen wir nur einige anführen wollen, um den Charakter derselben zu zeigen: Wenn A, B, C irgend welche Winkel sind, $Z = A + B$, $X = A - B$, $H = \frac{1}{2}(A + B + C)$ und r der Radius ist, so ist z. B. $\frac{1}{2} r \times \overline{v, C - v, X} = s, \overline{H - B} \times s \overline{H - A}$ und $\frac{1}{2} r \times \overline{v, Z - v, C} = s H \times s \overline{H - C}$. Die horizontalen Striche wurden damals ziemlich allgemein statt der Klammern gebraucht! Ein anderes Formelpaar war folgendes:

$$s \overline{\alpha + \beta + \gamma + \cdots} = S' - S''' + S^{\mathrm{V}} - S^{\mathrm{VII}} + \cdots \times \frac{1}{r^{n-1}},$$

$$s' \overline{\alpha + \beta + \gamma + \cdots} = S - S'' + S^{\mathrm{IV}} - S^{\mathrm{VI}} + \cdots \times \frac{1}{r^{n-1}}.$$

Hier ist unter S das Produkt aller Cosinus der Winkel $\alpha, \beta, \gamma \ldots$, n an der Zahl, unter $S', S'', S''' \ldots$ sind die Summen aller Produkte, gebildet aus je einem, je zwei, je drei ... Sinus in die übrigen $n - 1$, $n - 2$, $n - 3$ ... Cosinus dieser Winkel verstanden. In dieser Allgemeinheit erscheinen die Additionsformeln hier zum erstenmal. Eine ähnliche Formel stellt er auch für $\operatorname{tg}(\alpha + \beta + \gamma \cdots)$ auf

und leitet dann aus diesen Gleichungen die bereits bekannten Formeln für $\sin n\alpha$, $\cos n\alpha$, $\operatorname{tg} n\alpha$ u. s. w. ab, welche in verschiedenen Formen geschrieben werden. Neu war wohl die Form der Gleichung $\operatorname{tg} n\alpha = nt + At^3r^{-2} + Bt^5r^{-4} + Ct^7r^{-6} + Dt^9r^{-8} + \cdots$, worin $A = -n'' + nn'$, $B = n^{\mathrm{IV}} - nn''' + An'$, $C = -n^{\mathrm{VI}} + nn^{\mathrm{V}} + Bn' - An'''$, $D = n^{\mathrm{VIII}} - nn^{\mathrm{VII}} + Cn' - Bn''' + An^{\mathrm{V}}$ u. s. w. bedeuten, während $n' = \binom{n}{2}$, $n'' = \binom{n}{3}$, $n''' = \binom{n}{4}$ u. s. f. ist.

Außer Jones ist noch ein Mathematiker zu erwähnen, weniger von Bedeutung durch seine Schreibweise — er bedient sich häufig der Abkürzungen sin., co.-sin., tang., co.-tang., die er den Winkeln voransetzt, ohne jedoch andere Formeln als Proportionen zu schreiben — als durch einige Sätze, auf deren praktische Verwendbarkeit er in England wohl zum erstenmal aufmerksam machte. Es ist dies Thomas Simpson (1710—1761). Seine „Trigonometry plane and spherical" erschien in erster Auflage 1748, uns liegt nur die zweite von 1765 vor, der wir das Folgende entnehmen. Zunächst bestimmt Simpson die Zeichen der Funktionen im zweiten Quadranten sämtlich richtig, definiert sie aber, wie damals noch allgemein gebräuchlich, nur als Linien im Kreise, dessen Radius r er in der Rechnung beibehält. Die Sätze werden alle in Worten ausgesprochen und geometrisch abgeleitet und die Fundamentalaufgaben mit nur wenigen dieser Sätze abgeleitet. Dann fügt er aber noch einige „Eigenschaften der Dreiecke" hinzu, die unser Interesse erregen. So gibt er z. B. (61—62) elegante geometrische Ableitungen jener beiden Formeln der ebenen Trigonometrie, die bisher dem Astronomen Mollweide zugeschrieben wurden. Allerdings ist auch Simpson nicht der Erste[1]), der sie fand, denn der einen von ihnen begegneten wir schon bei Newton (S. 87) und beide werden wir vereinigt und rechnerisch abgeleitet bei Friedrich Wilhelm Oppel (1748) noch treffen.

Außerdem enthält das Buch noch eine Reihe anderer interessanter Dreieckssätze; so werden z. B. die Gleichungen abgeleitet $b + a : p - q = \cos\frac{C}{2} : \sin\frac{B-A}{2}$ und $b - c : p - q = \sin\frac{C}{2} : \cos\frac{B-A}{2}$, wo a, b, c die Dreiecksseiten und p und q die Abschnitte, die die Höhe des Dreiecks auf AB macht, bezeichnen. Dieselben folgen direkt durch Verbindung der bekannten Proportion: $b + a : p - q = c : b - a$ und

1) Sie scheinen nämlich in der ersten Auflage von Simpsons Schrift nicht zu stehen, da sie Cantor, dem die letztere vorlag, nicht erwähnt, Cantor III, 2, 533—535. Vgl. Näheres über ihre Geschichte in unserer Abhandlung „Zur Geschichte der Trigonometrie im 18. Jahrhundert", Bibliotheca math. II, 1901, 103—105.

einer analogen mit den beiden eben angeführten Sätzen. Ferner führt Simpson auch den schon von Streete und Anderson benützten Hilfswinkel (S. 44) geometrisch auf sehr elegante Weise ein und gibt wie früher Cavalieri, (S. 37) die trigonometrische Auflösung der Gleichungen 2. Grades, indem er z. B. aus $ax - x^2 = b^2$, x mittelst der beiden Gleichungen $\frac{1}{2}a : b = r : \sin\varphi$ und $r : \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\varphi_2 = b : x$ findet.

Aus den Sätzen über sphärische Trigonometrie endlich wollen wir nur die beiden direkt aus dem Sinussatze und der Tangentenregel abgeleiteten Formeln erwähnen:

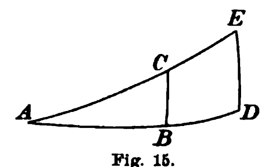


Fig. 15.

$$\operatorname{tg}\frac{a'+a}{2} : \operatorname{tg}\frac{a'-a}{2} = \operatorname{tg}\frac{b'+b}{2} : \operatorname{tg}\frac{b'-b}{2}$$

und $\sin(a'+a) : \sin(a'-a) = \operatorname{tg}\frac{c'+c}{2} : \operatorname{tg}\frac{c'-c}{2}$, wobei in den rechtwinkligen Dreiecken ABC und ADE in Fig. 15 $a = BC$, $a' = DE$, $b = AC$, $b' = AE$, und $c = AB$, $c' = AD$ bedeuten.

Wir wissen, daß hervorragende Mathematiker, wie John Newton, Wallis und andere, schon am Ende des 17. Jahrhunderts ab und zu rechnerische Ableitungen komplizierterer trigonometrischer Formeln aus einfacheren versucht hatten, systematisch aber wurde die algebraische Rechnung doch erst im 18. Jahrhundert in die Trigonometrie eingeführt und zwar durch den Jesuiten Jakob Kresa und den Petersburger Akademiker Friedrich Christian Maier. Kresa[1]) (1649—1715) knüpfte in seinem Werke „Analysis speciosa Trigonometriae", 1720, Pragae, 8°, Opus posthumum, an ein Werk[2]) seines Ordensgenossen Hugo d' Omerique an, das die Geometrie auf analytischem Wege behandelte, und für das Kresa eine Vorrede geschrieben hatte. Wenn auch seine Bezeichnungsweise noch in mancher Beziehung schwerfälliger ist als die der Engländer, so liegt doch in der konsequenten Anwendung der Rechnung ein unverkennbarer Fortschritt. Kresa schreibt statt Cosinus Sinus secundus $= S2$, statt Cotangens Tangens secunda $= T2$, statt Cosecans Secans secunda $= S2$ und drückt fast durchweg sämtliche Funktionen durch den Sinus aus, wodurch seine Rechnungen natürlich komplizierter werden; den Sinus setzt er gleich x oder y, dann lautet z. B. das Additionstheorem des Sinus $S = \frac{y\sqrt{r^2 - x^2} + x\sqrt{r^2 - y^2}}{r}$.[3])

1) In Mähren geboren, lehrte er in Prag, in Olmütz und in Madrid, wo ihm die Nobili in Menge zuströmten. Er beherrschte 9 Sprachen. Acta Erud. 1721. — 2) Analysis geometrica sive nova et vera methodus resolvendi tam problemata Geometrica quam Arithmeticas quaestiones, Gadibus 1698. in 4°. — 3) Vgl. die S. 72 Anm. 2 angeführte Bemerkung Montuclas, der Fr. Ch. Maier die erste Aufstellung der Additionsformeln zuschreibt.

Da sich übrigens Kresa auch zur Bezeichnung der Strecken in geometrischen Figuren der Buchstaben x, y, z u. s. w. bedient, so wird hierdurch die Übersichtlichkeit seiner Formeln sehr beeinträchtigt. Um ein Urteil über seine Methode zu ermöglichen, teilen wir die Behandlung der Aufgabe, aus der Basis $BC = c$ eines ebenen $\triangle ABC$, dem Gegenwinkel BAC und der Fläche desselben das Dreieck zu berechnen, mit. Es wird $\sin BAC = a$ gesetzt, $\cos BAC = b$, $BC = c$, $AB = x$, $AC = z$ und die Höhe AD auf die Seite $BC = d$. Ist dann $\sin ABC = y$, dann folgt aus $\triangle ABC$ $BC\,..\,S\,.\,BAC :: AC\,..\,S\,.\,ABC$, oder $c\,..\,a :: z\,..\,\frac{az}{c} = y$. Im $\triangle ADB$ ist $S\,.\,ABD\,..\,AD :: S\,.\,ADB\,..\,AB$, d. h. $\frac{az}{c}\,..\,d :: r\,..\,x$, also $\frac{axz}{c} = dr$, also $axz = cdr$, oder $a\,..\,c :: dr\,..\,xz$, also ist xz, d. h. $AB\,.\,AC$ (wofür er stets $AB : AC$ schreibt) gefunden. Nun ist aber nach einer bekannten Analogie:

$$r\,..\,S\,2\,(\text{anguli } BAC)\,b :: 2xz\,..\,xx + zz - cc,$$

woraus sich $xx + zz - cc$ und hiermit $xx + zz$ ergibt. Addiert man jetzt hierzu das bereits bekannte $2xz$, so hat man das Quadrat der Summe $AB + AC$ und durch Subtraktion erhält man das Quadrat der Differenz u. s. w. — Bemerkenswert ist übrigens, daß Kresa die Engländer sehr wohl kennt, denn er zitiert Caswell, das „Lexicum Technicum" von John Harris und die „Mathematical Tables" von Richard Mount und Thomas Page; er ist also jedenfalls durch das Studium ihrer Schriften zum Teil auf seine Behandlungsweise geführt worden, nur hätte er etwas mehr von ihrer weit besseren Bezeichnungsweise annehmen dürfen.

Einen weiteren Fortschritt machte die analytische Trigonometrie unter dem schon mehr erwähnten Friedrich Christian Maier (Mayer), welcher ihr zwei Aufsätze im II. und IV. B. der Kommentarien der Petersburger Akademie widmete. In dem 1. Aufsatze vom Jahre 1727, der den Titel „Trigonometria" führt (p. 12—30), beginnt der Verfasser allerdings mit der fehlerhaften Angabe, daß die Tangente eines stumpfen Winkels positiv sei, während er für die übrigen Funktionen das Zeichen richtig angibt; ebenso gibt er das Zeichen für Tangente und Cotangente von Winkeln im dritten und für die Cotangente von solchen im vierten Quadranten falsch an; es fehlt ihm eben die Erkenntnis, daß beim Durchgang durch das Unendliche ein Zeichenwechsel eintritt, ein Umstand, der übrigens auch noch lange nach Euler nicht genügend gewürdigt wurde. Übrigens ist Maier in Deutschland der Erste, der überhaupt von trigonometrischen Linien solcher Winkel spricht, die den zweiten Quadranten übersteigen! Auch beeinflussen jene Fehler seine späteren Untersuchungen nicht, da er

sie ausdrücklich nur für spitze Winkel anstellt. Seine „neue" Methode bestand nun darin, daß er sowohl für die Funktionen einzelner Winkel, als auch für die ihrer Summen und Differenzen eigene Buchstaben einführte, aus ihnen Formeln herstellte und mit diesen algebraisch rechnete. So z. B. wird das Additionstheorem für den Cosinus durch die beiden Formeln ausgedrückt: $\frac{Cc - Ss}{r}$ und $\frac{Cc + Ss}{r}$, das für die Tangente durch $rr \frac{T + t}{Tt - rr}$.

Besonderes Gewicht legt Maier auf direkt logarithmierbare Formeln und entwickelt daher z. B. die folgenden

$$\frac{S - s}{c - C} = \frac{c + C}{S + s} = \frac{B}{A} = \frac{r}{Q}, \quad \frac{S - s}{2a} = \frac{c + C}{2b} = \frac{B}{r}, \quad \frac{S + s}{2b} = \frac{c - C}{2a} = \frac{A}{r},$$

deren Bedeutung erkannt wird, wenn man beachtet, daß $S = \sin\alpha$, $C = \cos\alpha$, $s = \sin\beta$, $c = \cos\beta$, $B = \cos\frac{\alpha + \beta}{2}$, $A = \sin\frac{\alpha + \beta}{2}$, $Q = \operatorname{tg}\frac{\alpha + \beta}{2}$, $a = \sin\frac{\alpha - \beta}{2}$, $b = \cos\frac{\alpha - \beta}{2}$ bedeuten. Übrigens werden diese Formeln, die ihrem Inhalte nach längst bekannt waren, noch geometrisch abgeleitet.

Die Einführung des bekannten Hilfswinkels von Thomas Streete zur Berechnung des Tangentensatzes geschieht dagegen auf analytischem Wege. Ist die kleinere Dreiecksseite $= c$, die größere $= r$, t die Tangente der halben Summe der Gegenwinkel und y die ihrer halben Differenz, so ist zunächst nach dem Tangentensatz $\frac{r + c}{r - c} = \frac{t}{y}$. Betrachtet man jetzt die größere Seite als Radius und c als den Cosinus eines Winkels (x), „den man aus dem Kanon bestimmen kann", so ist nach einer früheren Formel $\frac{r + c}{r - c} = \frac{rr}{Q^2}$, $\left(Q = \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$, also auch $y = \frac{tQ^2}{r^2}$, also logarithmierbar.

Der Cosinussatz der sphärischen Trigonometrie wird in folgender Form geschrieben: „Der Cosinus eines Winkels $= \frac{rq - Cc}{Ss} r$; ist dieser Winkel $= B$, so bedeutet $q = \cos b$, $C = \cos c$, $c = \cos a$, $S = \sin c$, $s = \sin a$ in unserer Schreibweise. Indem nun Maier hieraus sinvers $B = r\frac{Ss - rq + Cc}{Ss} = 2\sin^2\frac{B}{2}$ bestimmt, findet er $\sin^2\frac{B}{2} = r^3 \frac{\frac{Ss + Cc}{r} - q}{2Ss} = r^3 \frac{Q - q}{2Ss}$. Außerdem bemerkt er, daß aus dem Cosinussatz sämtliche Formeln der sphärischen Trigonometrie, sowohl für das schiefwinklige, als auch für das rechtwinklige Dreieck abgeleitet werden können, hat aber diese Ableitung selbst nicht gegeben. Dennoch geht hieraus hervor, daß Maier seinen Vor-

gängern an Tiefe des Einblickes in den Zusammenhang und die Bildung der Formeln weit über war.

Diese seine Methode wendet **Maier** in dem zweiten Aufsatze 1728 auf ein „Problema trigonometrico-sphaericum“ an, welches lautet: „Wenn zwei sphärische Dreiecke so in einanderliegen, daß zwei gleiche Stücke sich decken, und außerdem vier andere Stücke gegeben sind, so können die sechs übrigen gefunden werden.“ Er löst jedoch nur den Fall, daß in dem Dreieck PZS (Fig. 16) ZP, $\sphericalangle SPZ = t$, $\sphericalangle SZP = \alpha$, und in $\triangle PZs$ $\sphericalangle sPZ = t'$ und $\sphericalangle sZP = \alpha'$ gegeben sind und $PS = Ps$ ist. Die astronomische Bedeutung der Aufgabe ist unmittelbar zu erkennen, wenn man beachtet, daß P der Pol, Z das Zenit, S und s zwei Sternörter mit gleicher Deklination sind. Die Formel, zu welcher er gelangt, lautet $y = \frac{AM - am}{c - C}$, wobei $y = \cos PZ$, $A = \sin t$, $M = \operatorname{ctg} \alpha$, $a = \sin t'$, $m = \operatorname{ctg} \alpha'$, $C = \cos t$, $c = \cos t'$ ist. Zur praktischen Ausführung der Rechnung bedient er sich dann wieder seiner früheren Formeln, indem er $c - C = \frac{2Nn}{r}$ setzt, wobei $N = \sin \frac{t + t'}{2}$, $n = \sin \frac{t - t'}{2}$ bedeutet. Ähnliche noch schwierigere, wenn auch praktisch wenig nützliche astronomische Aufgaben löste **Maier** unter beständiger Anwendung seiner Bezeichnungsweise und der damit möglichen analytischen Umformungen im V. Bande derselben Petersburger Berichte (1730), und seine Methode fand auch Anklang, indem sie von verschiedenen Autoren ähnlicher Abhandlungen, wie von **Daniel Bernoulli**[1]), von **Jakob Hermann**[2]) und von **Wolfgang Krafft**[3]) angewendet wurde. Auch der berühmte Franzose **Pierre-Louis Moreau de Maupertuis** (1698—1759), der namentlich durch die Lappländische Gradmessung bekannt wurde, bediente sich in seinen Arbeiten, wie z. B. in seiner „Astronomie nautique“[4]) 1751, der Schreibweise **Maiers**.

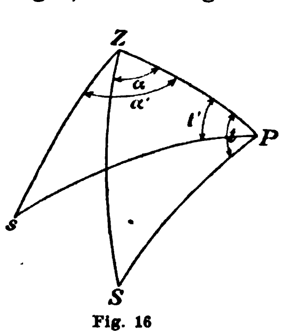


Fig. 16

Das wichtigste Werk aber, in welchem diese Bezeichnungsweise angewendet ist, ist unstreitig die „Analysis triangulorum“ von **Friedrich**

1) Commentarii Acad. Petrop. IV, 1729, 89. Über die Geschichte des dort behandelten Problems vgl. Correspondance mathém. et physique par P. H. **Fuß**, Petersburg 1843. II, 319 ff. Brief **Daniel Bernoullis** an **Goldbach** vom 22. September 1729. — 2) Comm. Acad. Petrop. IV, 94. — 3) Ebenda 110. — 4) **Maupertuis**, Oeuvres IV, 93 ff. In dieser Schrift finden sich auch ähnliche Differentialbetrachtungen, wie wir sie bei **Côtes** fanden. Eine sehr interessante Biographie **Maupertuis'** hat **Emil Du Bois-Reymond**, Leipzig 1893, herausgegeben.

Wilhelm von Oppel[1]), 1746 in 2^0 erschienen. Das Ziel, welches sich der Verfasser der Schrift setzte, aus wenigen geometrisch gewonnenen Sätzen die ganzen Formelsysteme der ebenen und sphärischen Trigonometrie durch algebraische Rechnung zu entwickeln, hat er tatsächlich erreicht und damit eine Absicht verwirklicht, die vor ihm von keinem Autor systematisch durchgeführt worden war; allerdings macht die schwerfällige Bezeichnungsweise die Lektüre seines Buches keineswegs zu einer Annehmlichkeit. Zunächst entwickelt er die wichtigsten goniometrischen Formeln, wobei er fast durchweg den Cosinus in der Form $\pm\sqrt{a^2 - f^2}$ ausdrückt (a ist der Sinus totus, der überall beibehalten wird, und f der Sinus eines Winkels), das doppelte Zeichen betonend, indem er richtig erkennt, daß derselbe im zweiten Quadranten negativ ist. Unter diesen Formeln fanden wir die damals noch neue:

$$4b^2c^2d^2 = a^2(b + c + d)(b + c - d)(d + b - c)(c + d - b),$$

wo a den Sinus totus, b, c, d die Sinus dreier Dreieckswinkel bedeuten. An die Aufstellung goniometrischer Formeln schließt sich die Entwicklung der Formeln zur Berechnung ebener Dreiecke, bei deren Durchsicht wir der Tatsache begegnen, daß Oppel bereits jene beiden praktischen Formeln gefunden hat, die man bis heute allgemein dem Astronomen Mollweide (S. 87 und 93) zuschrieb, und zwar gibt er sie in einem Wortlaut an, der sich völlig mit demjenigen deckt, unter welchem sie noch heute gelehrt werden.[2]) Die erste Regel lautet: „Die Basis des Dreiecks verhält sich zur Differenz der Schenkel wie der Sinus der halben Summe der Basiswinkel zum Sinus der halben Differenz derselben", und ähnlich die zweite für die Summe der Schenkel. Seine Ableitung ist folgende: Nachdem er den Tangentensatz $(a + b) : (a - b) = \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} : \operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}$ geometrisch aufgestellt hat, berechnet er aus ihm $\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$, resp. $\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ und findet z. B. im ersten Falle $\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = (a - b)\sin\frac{\alpha+\beta}{2} : \sqrt{(a+b)^2 - 4ab\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}} = (a-b)\sin\frac{\alpha+\beta}{2} : c$, nachdem bereits vorher der Cosinussatz durch die Formel: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma = (a+b)^2 - 4ab\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}$ bestimmt worden war. Benützt wird die zweite dieser Gleichungen später zur Berechnung der

1) Oppel war Oberberghauptmann in Freiberg und lebte von 1720—1769. — 2) Oppel a. a. O. § 84 und 85 p. 18. Geschrieben werden die Formeln: $v = (m - n)p : AB$ und $\sqrt{a^2 - v^2} = (m + n)\sqrt{a^2 - p^2} : AB$. Hier ist a der Sinus totus, v der Sinus der halben Differenz, p der Sinus der halben Summe der Winkel, m, n sind die Schenkel und AB ist die Basis.

Winkel eines Dreiecks, von dem man eine Seite, die Summe der beiden andern und den von diesen eingeschlossenen Winkel kennt.

Im Anschlusse an die Aufstellung der Hauptformeln findet sich dann eine Reihe zum Teile schwieriger Dreiecksaufgaben behandelt, wobei Oppel zu manchen neuen Resultaten kommt. So beweist er z. B. die Gleichung [1] $\sin A_1 \sin B_1 \sin C_1 = \sin A_2 \sin B_2 \sin C_2$ (Fig. 17), die ihn zur Ableitung des Satzes von Ceva führt, und an einer anderen Stelle findet er den Sinus eines Dreieckswinkels durch die drei Höhen h, i, k in der eleganten Form [2]):

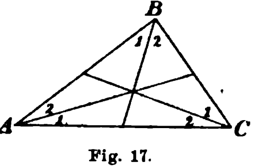


Fig. 17.

$$a\sqrt{(ik+kh+hi)(ik+kh-hi)(hi+ik-kh)(kh+hi-ik)} : 2kih^2$$

ausgedrückt.

Völlig neu und originell ist auch die Begründung seiner im zweiten Abschnitte behandelten sphärischen Trigonometrie; er leitet nämlich die Fundamentalsätze derselben aus dem Netze des zum Kugeldreieck gehörigen Dreikants ab. Wir fanden diesen Gedanken schon bei Caswell (S. 47) und R. J. Boscowich (S. 91), aber Oppel gebührt unstreitig das Verdienst, die Methode systematisch durchgeführt zu haben. Hierbei verfuhr er, um z. B. den Sinussatz abzuleiten, folgendermaßen. Er klappte die beiden Seitenflächen ABE und AFB des Dreikants (Fig. 18) in die Ebene der Seitenfläche AEF um, machte AB = sin. tot., und konstruierte, wie aus der Figur leicht zu ersehen, die Neigungswinkel $ME\beta$ und $MF\beta$ der Flächenwinkel an den Kanten AE, resp. AF. Ist jetzt $\sin BAF = b$, $\sin BAE = d$, so ist $BE : BF = d : b$, oder $E\beta : F\beta = d : b$; aber $E\beta : F\beta = \operatorname{cosec} \beta EM : \operatorname{cosec} \beta FM = \sin \beta FM : \sin \beta EM$, also auch $d : b = \sin \beta FM : \sin \beta EM$, und die Übertragung dieses Satzes ist durch die vorhergehenden Erörterungen evident. An derselben Figur wird dann der Cosinussatz für die Seiten bewiesen.[3]) Bezeichnen wir, um die Sache übersichtlicher zu machen, $\sphericalangle BAE$ mit a, $\sphericalangle EAF$ mit b, $\sphericalangle FAB$ mit c, und $\sphericalangle MF\beta$ mit α und setzen $AB = 1$, so hat Oppel schon in der

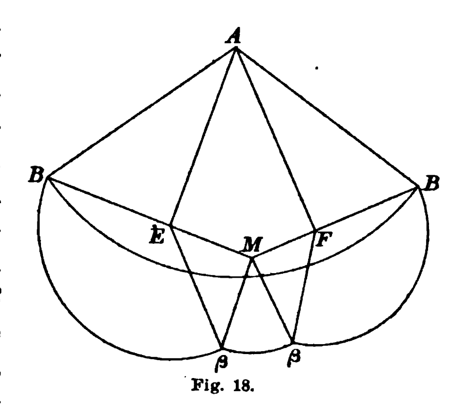


Fig. 18.

1) A. a. O. § 150, 33. — 2) Ebenda § 160, 35. — 3) Ebenda § 76, 56—57.

ebenen Trigonometrie die Beziehung $FM = \frac{AE - AF \cos b}{\sin b}$ für das Kreisviereck $EAFM$ bewiesen. Nun ist aber $AE = \cos a$, $AF = \cos c$ und somit $FM \sin b = \cos a - \cos c \cos b$. Aber $BF : FM = \sin c : \frac{\cos a - \cos c \cos b}{\sin b} = F\beta : FM = 1 : \cos \alpha$. Also $\cos \alpha = \frac{\cos a - \cos c \cos b}{\sin b \sin c}$. Auch die Fälle, in denen die hier vorkommenden Winkel teilweise stumpf sind, werden in Betracht gezogen, und die dann resultierenden Zeichenänderungen bestimmt, und außerdem wird der Cosinussatz noch auf eine zweite Art aus einem anderen Satze abgeleitet. Endlich wird bemerkt, daß sich aus dem Sinus- und Cosinussatze allein sämtliche Formeln der sphärischen Trigonometrie ableiten lassen, und gezeigt, wie man mittelst des Supplementardreiecks zu jeder Formel eine reziproke bilden kann.[1]) Daran schließt sich die Entwicklung einer großen Zahl von Formeln, und es ist nur auffällig, daß Oppel hierbei nirgends auf bequeme Logarithmierbarkeit derselben Rücksicht nimmt[2]), es kommt ihm eben nur darauf an, die Formeln nach Möglichkeit rechnerisch zu gewinnen.

Oppels Behandlungsweise, wie eine Menge seiner Resultate sind entschieden originell zu nennen, und er hätte sicher Nachahmer gefunden, wenn nicht in des großen Eulers Arbeiten auch hier, wie so oft, das Bessere der Feind des Guten gewesen wäre.

Bevor wir uns aber zu diesem Manne wenden, wollen wir noch einmal einen kurzen Rückblick auf die Forschungen werfen, die wir in diesem Abschnitte besprochen haben. Dieselben gipfeln in der erfolgreichen Ausbildung der analytischen Methoden zur allgemeinen Behandlung der Multiplikations- und Teilungsformeln goniometrischer Funktionen, und die Einführung des Imaginären durch Johann Bernoulli und De Moivre eröffnete neue Wege zur Lösung der Teilungsgleichungen; Lagnys und Machins' Arbeiten boten verbesserte Hilfsmittel zur Berechnung der Zahl π, und das enorme Rechentalent Sharps förderte sowohl diese als auch die direkte Bestimmung der trigonometrischen Funktionen aus den Reihen Newtons. Dazu kam die Ausbildung der praktischen Interpolationsmethoden durch letzteren und seinen Schüler Stirling, Methoden, welche von da ab bei der Tafelberechnung eine große Rolle spielten. Nicht so bedeutend waren die Neuschöpfungen in dem Gebiete der elementaren Trigonometrie, die nur durch wenige Sätze ergänzt wurde, und nur die allmähliche Einführung der algebraischen Rechnung, teils durch Newton und

1) A. a. O. § 77 in Verbindung mit § 32 Sectio II. — 2) So finden sich z. B. die Neperschen Formeln nicht unter den seinigen, dagegen eine ganze Reihe anderer, die dasselbe leisten, ohne jedoch direkt logarithmierbar zu sein.

andere Engländer, teils durch Kresa, Maier und Oppel deutete die Richtung an, nach welcher eine Vervollkommnung der alten Methode erwünscht und möglich war. In praktischer Weise geleistet wurde eine solche erst von Euler, durch dessen geniale Schöpfungen unsere Wissenschaft völlig umgestaltet wurde und jene geschmeidige Form erhielt, in der sie uns noch heute die vorzüglichsten Dienste leistet.

4. Kapitel.

Leonhard Euler.

§ 1. Eulers Verdienste um die Reform der Goniometrie.

Die beiden letzten Drittel des 18. Jahrhunderts beherrscht in der Entwicklung der mathematischen Wissenschaften Leonhard Eulers gigantische Gestalt. Alle Gebiete mathematischen Denkens hat sein schöpferischer Geist erweitert und vervollständigt, manche so gut wie neu geschaffen, manche und darunter vor allem unsere Wissenschaft von Grund aus umgestaltet. Die Richtung seiner natürlichen Begabung veranlaßte ihn in erster Linie, die analytische Form auszubilden und zu immer größerer Vollkommenheit zu entwickeln, und in diesem allgemeinen Bestreben erkannte sein Scharfblick sofort, was im speziellen der Trigonometrie nottat, um sie geschmeidiger und für die praktische Rechnung verwendbarer zu machen, nämlich eine ausgebildete Formelsprache. In der Schöpfung und Vervollkommnung derselben liegt daher auch sein hauptsächlichstes Verdienst um den, wenn man so sagen darf, elementaren Teil des uns interessierenden Wissenszweiges. Aber auch nach anderen Richtungen hin ist seine reformatorische Tätigkeit von nicht geringer Bedeutung. So verdanken wir ihm die konsequente Auffassung der trigonometrischen Linien als Funktionen eines Winkels, indem er sie einerseits als Verhältnisgrößen ansah, aber auch unabhängig von jeder geometrischen Deutung ein rein analytisches Fundament für dieselben schuf, ihre analytischen Eigenschaften untersuchte und verwendete. In letzter Linie endlich ist seine Tätigkeit inbezug auf die Kreismessung und verwandte Gebiete für uns von Interesse, da er auch hier neue Mittel und Wege fand — und zwar in fast unerschöpflicher Fülle — um zu beliebig genauen näherungsweisen Lösungen zu gelangen.

Bevor wir nun Eulers Tätigkeit nach diesen verschiedenen Richtungen ins Auge fassen, wollen wir einen kurzen Überblick über die Lebensverhältnisse dieses hervorragenden Mannes geben.

Leonhard Euler[1]) wurde 1707 zu Basel als Sohn des Geistlichen Paul Euler geboren, der selbst ein begeisterter Schüler Jakob Bernoullis gewesen war und seinen Sohn, der von ihm die Neigung zur Mathematik geerbt hatte, zunächst selbst unterrichtete. Frühzeitig bezog dieser die Universität Basel und erlangte schon mit 16 Jahren die Magisterwürde. Sein Lehrer in der Mathematik war Johann Bernoulli, seine Studiengenossen waren des letzteren Söhne Nikolaus II und Daniel, die ihn an Alter um 12, bezüglich 7 Jahren übertrafen. Als Katharina I. 1724 nach einem Entwurfe Peters des Großen die Petersburger Akademie gegründet hatte, wurden Nikolaus und Daniel dahin berufen, und als ersterer bald starb, folgte ihm Euler, eben 20 Jahre alt, als Adjunkt für das mathematische Fach nach. Doch erst 1730, als der uns schon bekannte Schweizer Jakob Hermann, dann Bilfinger und Daniel nacheinander Petersburg verlassen hatten, wurde Euler Mitglied der Akademie. Die infolge der beständigen Palastrevolutionen und Throneswechsel auch für die Akademie unerquicklichen Verhältnisse verleideten ihm jedoch seinen Aufenthalt so, daß er 1741 einem Rufe Friedrich des Großen nach Berlin folgte, wo er 1744 Direktor der neugestalteten mathematischen Klasse der Berliner Akademie wurde. Als aber unter Katharina II. eine neue Blütezeit der Wissenschaften in Petersburg begann, kehrte er 1766 wieder dahin zurück. Leider hatte er das Unglück, noch in demselben Jahre völlig zu erblinden, nachdem er schon 1735 das eine Auge verloren hatte. Aber dennoch arbeitete er, unterstützt von einem ausgezeichneten Gedächtnis und der Beihilfe aufopfernder Freunde bis zu seinem Tode (1783) mit ungebrochenem Eifer fort. Seine Schriften bestehen aus 32 Quartbänden und 13 Oktavbänden selbständiger Werke und gegen 800 Abhandlungen[2]), von denen viele noch nach seinem Tode erschienen — fürwahr eine beispiellose Fruchtbarkeit, die uns noch mit um so größerer Bewunderung erfüllt, als seine Tätigkeit alle Gebiete der reinen und angewandten Mathematik umspannte und überall Neues und Bahnbrechendes zu Tage förderte.

Was die Trigonometrie anlangt, so sehen wir, daß Euler schon frühzeitig die Notwendigkeit erkannte, sie in formaler Weise anders als bisher zu behandeln, denn in einem seiner ersten Aufsätze vom Jahre 1729[3]) schreibt er den Cosinussatz der sphärischen Trigonometrie für das $\triangle ABC$ in der Form:

---

1) Allgemeine deutsche Biographie VI, 422, Artikel von M. Cantor. — 2) Das beste Verzeichnis von Eulers Schriften ist der Index operum Leonardi Euleri von Johann Hagen, Berlin 1896, 8°. — 3) Solutio problematis astronomici etc. Comm. Ac. Petr. IV, 98.

$$\text{cos. anguli } A = \frac{\cos : BC - \cos : AB \cdot \cos : AC}{sAB \cdot sAC}$$

und leitet in einem Corollar daraus die Formel

$$\cos : BC = \cos : AB \cdot \cos : AC + \cos A \cdot sAB \cdot sAC$$

ab, die wir in dieser Gestalt bei keinem früheren Autor finden.

Also schon hier ist der Sinus totus = 1 gesetzt und von der spätern Schreibweise fehlt nur noch die bequemere Bezeichnung der Seiten und die Abkürzung „sin" statt „s". Von dem hier mit diesen und ähnlichen Formeln elegant gelösten Probleme, aus drei Sternhöhen und den Differenzen der Beobachtungszeiten die Polhöhe und die Deklination des Sternes zu finden, gaben auch gleichzeitig Daniel Bernoulli, Hermann und Krafft Lösungen, bedienten sich aber, wie schon früher bemerkt, hierbei der Schreibweise Maiers.

Da übrigens die bedeutenderen Arbeiten Eulers über Trigonometrie einer weit späteren Zeit angehören, so wollen wir zunächst ein Bild von der völligen Umgestaltung zu geben suchen, welche durch ihn die Goniometrie erfuhr. Dabei fassen wir den Begriff der Goniometrie im weitesten Sinne auf, indem wir zu derselben nicht nur die Relationen zwischen den Winkelfunktionen rechnen, sondern auch die analytischen Formeln zur Berechnung derselben, sowie das Multiplikations- und Divisionsproblem der trigonometrischen Funktionen.

Die goniometrischen Formeln im engeren Sinne hat Euler in seinem berühmten Werke „Introductio in Analysin infinitorum", Lausannae 1748, 2 Voll. in 4° zum erstenmal in der neuen Schreibweise, die ganz der unsrigen entspricht, zusammengestellt. Indem er nämlich (Kap. 8, § 127) unter z einen beliebigen Bogen des Kreises versteht, „dessen Radius beständig gleich 1 gesetzt werden soll", schreibt er sin. $A \cdot z$ oder sin. z, cos. $A \cdot z$ oder cos. z, tang. z, cot. z, sec. z, cosec. z (A = arcus); hier und da kommt auch in seinen Schriften sin. $v \cdot z$ für sinvers vor. Euler hat weder in der Introductio, noch sonst irgendwo die trigonometrischen Funktionen ausdrücklich als Verhältnisse der Seiten des rechtwinkligen Dreiecks, d. h. also als Zahlen, definiert, aber für den, welcher seine Schriften genauer kennt, besteht dennoch kein Zweifel, daß er sie als solche auffaßte, denn an verschiedenen Stellen[1]) finden sich direkt Verhält-

---

1) So z. B. in dem Aufsatze „Annotationes in locum quendam Cartesii ad circuli quadraturam spectantem", Novi Comm. Acad. Petr. VIII, 1760—61, 159 ff.; ferner auch in seinem Hauptaufsatze „Trigonometria sphaerica universa", Acta Acad. Petr. 1779, I, 73. (Vgl. die Übersetzung von E. Hammer, Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften No. 73, p. 41, daselbst steht: $bp = Cb \cdot \sin C$, $Cp = Cb \cos C$.) Wir können uns daher der jüngst ausgesprochenen Ansicht (E. Haentschel, „Über die verschiedenen Grundlegungen der Trigonometrie,

nisse geschrieben. Auch war er hierzu schon dadurch gezwungen, daß er sie als Winkelfunktionen in die Analysis einführte, wie Johann Bernoulli die Logarithmen[1]), und Simon Klügel[2]) sagt daher mit vollem Rechte: „Nach der alten Ansicht der goniometrischen Funktionen waren es bloße Linien, die man unter sich und mit dem Halbmesser zu Gleichungen verknüpfte ..., und hier den Halbmesser zur Einheit nehmen, war nur Ersparung im Schreiben, welche die Gleichartigkeit (Homogenität) der Glieder zerstörte. Nach der neuen, durch Euler eingeführten, sind sie Zahlgrößen, welche die Gleichartigkeit der Glieder nicht aufheben, ...[3])

Im § 127 der Introductio erwähnt nun Euler zunächst „als aus der Trigonometrie bekannt" die Werte von Sinus und Cosinus für $z = 0, \frac{\pi}{2}\ \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$, gibt $\cos z = \sin(\frac{1}{2}\pi - z)$, $\sin z = \cos(\frac{1}{2}\pi - z)$ und $(\sin z)^2 + (\cos z)^2 = 1$ an und definiert $\operatorname{tang} z = \frac{\sin z}{\cos z}$ und $\cot z = \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{1}{\operatorname{tang} z}$. Dann teilt er im nächsten Paragraphen die Additionsformeln der beiden Grundfunktionen mit und leitet aus ihnen zum erstenmal die Formeln für die Vermehrung des Argumentes um ganze Perioden und Periodenhälften in allgemeinster Weise ab, denen er dann in § 129 noch die Formeln für sin · und cos · $(2y + z)$, $(3y + z)$, $(4y + z)$ beifügt. Daß hierzu die Gültigkeit der Additionsformeln auch für nicht spitze Winkel zuerst hätte bewiesen sein sollen, hat er allerdings außer acht ge-

---

Wissenschaftl. Beil. zum Jahresbericht des Köllnischen Gymnasiums zu Berlin 1900), Euler habe, wie seine Vorgänger, die trigonometrischen Funktionen nur als Linien betrachtet, nicht anschließen. Daß er sie gelegentlich auch als Linien im Kreise mit dem Radius 1 auffaßte, daran besteht natürlich kein Zweifel.

1) In seiner Abhandlung „Subsidium calculi sinuum", Novi Comm. Acad. Petr. V, 164—165 sagt er hierüber ausdrücklich: „Dadurch, daß der Sinuskalkül in die Analysis aufgenommen wurde, so daß die Sinus, Cosinus, Tangenten der Winkel den Rechnungsvorschriften wie die Logarithmen unterworfen sind und ebensolche algebraische Größen darstellen, hat die Analysis zweifelsohne einen großen Zuwachs erhalten ... Ebenso (wie Johann Bernoulli die Logarithmen zu analytischen Größen gemacht hat) glaube ich die Sinus und Tangenten der Winkel zuerst in den Kalkül eingeführt zu haben, so daß man sie wie andere Größen behandeln und mit ihnen alle Operationen ohne jedes Hindernis ausführen kann. Wenn dies auch nicht von großer Wichtigkeit scheinen möchte, da es hauptsächlich auf der von mir in die Rechnung eingeführten Bezeichnungsweise dieser Größen beruht ..., so hat doch eben diese Art der Bezeichnung nachmals der ganzen Analysis so große Hilfsmittel verschafft, daß dadurch ein fast neues Feld erschlossen wurde ..." — 2) Wörterbuch II, 1805, 618. — 3) Wie wir weiter unten sehen werden, war S. Klügel selbst der erste, der in seiner „Analytischen Trigonometrie" 1770 diese Definition zum präzisen Ausdruck brachte.

lassen. Im § 130 folgen die vier prosthaphäretischen Formeln in unserer Schreibweise, sowie jene für Sinus und Cosinus des halben Winkels, denen sich im § 131 die Gleichungen anschließen, durch welche die Summen und Differenzen von $\sin a$ und $\sin b$, $\cos a$ und $\cos b$ in Produktform dargestellt werden. § 132 bringt dann die Gleichung

$$(\cos x \pm \sqrt{-1}\sin x)(\cos y \pm \sqrt{-1}\sin y) = \cos(x+y) \pm \sqrt{-1}\sin(x+y),$$

welche noch auf drei Argumente ausgedehnt wird. Da das Gesetz der Bildung solcher Produkte sofort erkennbar ist, schließt er im folgenden Paragraphen auf die Formel

$$\cos \cdot nz = \frac{(\cos \cdot z + \sqrt{-1}\sin \cdot z)^n + (\cos \cdot z - \sqrt{-1}\sin \cdot z)^n}{2}$$

und die analoge für $\sin \cdot nz$ und gewinnt durch Entwicklung der Binome die bekannten Ausdrücke für $\cos \cdot nz$ und $\sin \cdot nz$ in Funktion der Potenzen von $\cos \cdot z$ und $\sin \cdot z$. Ist nun z, so fährt er in § 134 weiter, ein sehr kleiner Bogen, so daß $\sin \cdot z = z$ und $\cos \cdot z = 1$ ist, und läßt man n eine unendlich große Zahl bedeuten, so daß nz ein endlicher Bogen v wird, so wird $\sin \cdot z = z = \frac{v}{n}$ und man erhält die bekannten Potenzreihen für $\sin \cdot v$ und $\cos \cdot v$. Es ist dies die erste Ableitung der Sinus- und Cosinusreihe ohne Integralrechnung. Setzt man dann weiter $v = \frac{m}{n} 90^0$, so bekommt man die Potenzreihen für $\sin \cdot A \frac{m}{n} 90^0$ und $\cos \cdot A \frac{m}{n} 90^0$, die Euler bis zur 29. beziehungsweise 30. Potenz fortsetzt und ihre Koeffizienten auf 28 Dezimalen anführt. Diese Reihen hatte er übrigens schon 1739 in dem Aufsatze „Methodus facilis computandi angulorum sinus ac tangentes, tam naturales, quam artificiales“[1]) mitgeteilt, wie er sagt: „ut alios calculo tam taedioso liberem.“ Ebenda finden sich auch schon die im § 135 der Introductio angeführten Reihen für $\mathrm{tang} \cdot A \frac{m}{n} 90^0$ und $\cot \cdot A \frac{m}{n} 90^0$, welche mit 13 stelligen Koeffizienten bis zur 25. Potenz incl. von $\frac{m}{n}$ fortgeführt werden, ohne eine Ableitung angegeben. Auch in der Introductio erwähnt er a. a. O. nur, daß man sie durch Division der Sinus- und Cosinusreihen erhalten kann, gibt aber dann später (§ 198a und 198b) eine ausführliche Ableitung derselben. Diese beruht darauf, daß er die Nullstellen der Funktion $\cos \frac{x\pi}{2n} + \mathrm{tg} \frac{m\pi}{2n} \cdot \sin \frac{x\pi}{2n}$ sucht und sie mit Hilfe derselben in ein unendliches Produkt entwickelt. Indem er dann andererseits die Potenz-

1) Comm. Acad. Petrop. XI, p. 194 ff.

reihen für $\cos\frac{x\pi}{2n}$ und $\sin\frac{x\pi}{2n}$ einführt und das unendliche Produkt ausmultipliziert, erhält er durch Gleichsetzen der Koeffizienten gleichhoher Potenzen von x verschiedene Reihen, von denen die erste

$$\frac{\pi}{4mn}\operatorname{tg}\frac{m\pi}{2n}=\frac{1}{n^2-m^2}+\frac{1}{9n^2-m^2}+\frac{1}{25n^2-m^2}+\cdots$$

lautet; ähnlich ergibt sich die Reihe

$$\operatorname{ctg}\frac{m\pi}{2n}=\frac{2n}{m\pi}-\frac{4mn}{\pi}\left(\frac{1}{4n^2-m^2}+\frac{1}{16n^2-m^2}+\frac{1}{36n^2-m^2}+\cdots\right).$$

Nun werden die einzelnen Glieder dieser Reihen durch Division wieder in unendliche Reihen entwickelt, welche alle von den Formen $1+\frac{1}{3^{2p}}+\frac{1}{5^{2p}}+\frac{1}{7^{2p}}+\cdots$ und $\frac{1}{4^{2p}}+\frac{1}{6^{2p}}+\frac{1}{8^{2p}}+\cdots$ sind. Die Summation dieser Reihen, welche Jakob Bernoulli noch ein unübersteigliches Hindernis zu bieten schien, hatte aber Euler bereits 1734—35 geleistet.[1])

In den §§ 136 und 137 der Introductio werden die Mittel angegeben, um die vollständige Berechnung der Funktionentafeln mit Zugrundlegung dieser Reihen zu ermöglichen. Hierzu bemerkt Euler zunächst, daß mit Hilfe der schon seit Vieta bekannten Formeln $\sin(30^0+z)=\cos z-\sin(30^0-z)$ und $\cos(30^0+z)=\cos(30^0-z)-\sin z$ die Sinus und Cosinus aller über 30^0 liegenden Winkel aus denen der Winkel unter 30^0 durch bloße Addition und Subtraktion gefunden werden können, dann folgert er aus dem Additionstheorem der Tangente die Formeln $\operatorname{tg}2a=\frac{2\operatorname{tg}a}{1-\operatorname{tg}^2 a}$ und $\operatorname{ctg}2a=\frac{\operatorname{ctg}a-\operatorname{tg}a}{2}$ und hieraus für $a=30^0-b$ $\operatorname{tg}(30^0+2b)=\frac{\operatorname{ctg}(30^0-b)-\operatorname{tg}(30^0-b)}{2}$, Formeln, mit denen sich auch die Cotangenten und Tangenten der Bogen, die größer als 30^0 sind, ergeben.

Der nächste Paragraph 138 bringt die analytische Definition der Sinus- und Cosinus-Funktionen mit Hilfe der Exponentialfunktion. Wir sahen (S. 72), daß Johann Bernoulli bereits 1702 den Zusammenhang zwischen dem Arcustangens eines reellen Winkels und dem Logarithmus einer imaginären Zahl entdeckt hatte. Euler aber hatte 1740[2]) bemerkt, daß die Ausdrücke $\frac{\pi\sqrt{-q}}{\sin(\pi\sqrt{q})}$ und $\frac{\pi\sqrt{-q}}{\operatorname{tg}(\pi\sqrt{-q})}$

1) De summis serierum reciprocarum. Commentarii Ac. Petr. VII, 123 ff. Introductio § 175. Johann Bernoullis Aufsatz über denselben Gegenstand Opera IV, 20 ist erst nach jenem Eulers geschrieben. Siehe Correspondance mathém. von P. H. Fuß II, 15—17. — 2) De seriebus quibusdam considerationes. Comm. Ac. Petr. XII, p. 65.

die reellen Werte $\frac{2e^{\pi\sqrt{q}}\pi\sqrt{q}}{e^{2\pi\sqrt{q}}-1}$ und $\frac{(e^{2\pi\sqrt{q}}+1)\pi\sqrt{q}}{e^{2\pi\sqrt{q}}-1}$ besitzen.[1]) Von dieser Zeit an scheint er sich näher mit der Sache beschäftigt zu haben, denn am 9. Dezember 1740 schrieb er an Goldbach[2]), er habe das merkwürdige Paradoxon gefunden, daß der Ausdruck $\frac{2^{+\sqrt{-1}}+2^{-\sqrt{-1}}}{2}$ nahe $=\frac{10}{13}$ sei, daß sein wahrer Wert aber durch $\cos 39^0\,42'\,51''\,52'''\,9^{IV}$ dargestellt werde. Hieraus folgt aber doch im Zusammenhalt mit den oben angeführten Ausdrücken, die er nur nach $\sin\pi\sqrt{-q}$ und $\operatorname{tg}\pi\sqrt{-q}$ aufzulösen brauchte, daß er bereits damals im Besitze der Formeln $\cos v=\frac{e^{iv}+e^{-iv}}{2}$ und $\sin v=\frac{e^{iv}+e^{-iv}}{2i}$[3]) war. Auf die Ableitung derselben aus den Ausdrücken

$$\cos v=\frac{\left(1+\frac{vi}{n}\right)^n+\left(1-\frac{vi}{n}\right)^n}{2}\quad\text{und}\quad\sin v=\frac{\left(1+\frac{vi}{n}\right)^n-\left(1-\frac{vi}{n}\right)^n}{2i}$$

für $n=\infty$, welche er in § 138 der Introductio angibt, scheint er aber erst durch eine Mitteilung gekommen zu sein, welche ihm Nikolaus I Bernoulli[4]) in einem Briefe vom 13. Juli 1742 machte. Dieser schrieb ihm nämlich[5]), er habe schon 1728 seinen Onkel (Johann Bernoulli) mit der Formel $\sin nA=\frac{(\sqrt{1-z^2}+zi)^n-(\sqrt{1-z^2}-zi)^n}{2i}$ bekannt gemacht, welche für $z=\sin A$ und $A=\frac{s}{n}$ bei unendlich großem n übergehe in $\sin s=\frac{\left(1+\frac{si}{n}\right)^n-\left(1-\frac{si}{n}\right)^n}{2i}$, und darauf hin teilte dann Euler in einer Abhandlung vom Jahre 1743[6]) ohne weiteren Beweis die Formeln $e^z=\left(1+\frac{z}{n}\right)^n_{(n=\infty)}$[7]) und $\sin s=\frac{e^{si}-e^{-si}}{2i}$ mit, aber erst

1) Diese Ausdrücke ergaben sich ihm nämlich als Summen reeller Reihen, woraus er schloß, daß sie selbst reell sein müßten, und aus dem bekannten Zusammenhang der Arcusfunktionen mit dem Logarithmus ihren Wert bestimmte. (Vgl. die Methode Eulers bei Reiff, Geschichte der unendlichen Reihen 1889, 104). — 2) Corresp. mathém. v. Fuß I, 111. Christian Goldbach (1690—1764) kam 1725 nach Petersburg, wo er Mitglied und Sekretär der Akademie wurde, 1742 trat er als Kollegienrat in das russische Ministerium ein. — 3) Wir schreiben hier und im folgenden statt $\sqrt{-1}$ zur Abkürzung das Gaußsche i. — 4) Nikolaus I Bernoulli war 1687 in Basel geboren, von 1716—19 Professor der Mathematik in Padua, dann in seiner Vaterstadt Professor der Rechtswissenschaften. Er starb daselbst 1759. — 5) Corresp. mathém. von Fuß II, 683. — 6) De summis serierum reciprocarum ex potestatibus numerorum naturalium ortarum. Miscellanea Berolinensia VII, 177. — 7) Übrigens hatte Euler schon 1730—31 erkannt, daß für $z=0$ $\frac{1-x^z}{z}=-\log x$ ist. Comm. Ac. Petr. V: De progressionibus transcendentibus, seu quarum termini generales algebraice dari nequeunt.

in der Introductio stellte er beide Formeln zusammen, gab ihre Ableitung und schloß auch noch die Gleichungen $e^{iv} = \cos v + i \sin v$ und $e^{-iv} = \cos v - i \sin v$ daraus, und ein Jahr später (1749) teilte er auch die Definitionen von $\sin(x + iy)$ und $\cos(x + iy)$ mit.[1])

In den beiden folgenden §§ 139 und 140 vervollständigt Euler diese Formelgruppe, indem er noch $z = \frac{1}{2i} \log \frac{\cos z + i \sin z}{\cos z - i \sin z} = \frac{1}{2i} \log \frac{1 + i \operatorname{tg} z}{1 - i \operatorname{tg} z}$ ableitet und aus dem letzten Ausdrucke durch Einführung der logarithmischen Reihe jene für den Arcustangens und hieraus die Leibnizsche Reihe für $\frac{\pi}{4}$ gewinnt. Wie er erstere zur Berechnung von π benutzte, werden wir später sehen.

Ergänzungen zu den im 8. Kap. der „Introductio" gegebenen Entwicklungen von Sinus und Cosinus eines vielfachen Winkels nach Potenzen dieser Funktionen des einfachen Bogens gab Euler 6 Jahre später in dem Aufsatze „Subsidium calculi sinuum"[2]), indem er umgekehrt von dem für positive ganzzahlige n bewiesenen Moivreschen Satze ausgehend $\cos^n \varphi$ und $\sin^n \varphi$[3]) durch Cosinus und Sinus der Vielfachen des Winkels ausdrückte. Er erhielt dadurch die Gleichungen:[4])

$$2^{n-1} \cos^n \psi = \sum_{p=0}^{p=\frac{n}{2}} \binom{n}{p} \cos(n - 2p)\psi,$$

$$2^{4n-1} \sin^{4n} \psi = \sum_{p=0}^{p=2n} (-1)^p \binom{4n}{p} \cos(4n - 2p)\psi,$$

$$2^{4n-2} \sin^{4n-1} \psi = \sum_{p=0}^{p=2n-1} \binom{4n-1}{p} \sin(4n - 2p - 1)\psi,$$

$$2^{4n-3} \sin^{4n-2} \psi = \sum_{p=0}^{p=2n-1} (-1)^{2p+1} \binom{4n-2}{p} \cos(4n - 2 - 2p)\psi,$$

$$2^{4n-4} \sin^{4n-3} \psi = \sum_{p=0}^{p=2n-2} (-1)^p \binom{4n-3}{p} \sin(4n - 3 - 2p)\psi,$$

welche zunächst für ein positives ganzzahliges n richtig siud. Euler aber setzt skrupellos n negativ, ohne sich nur im mindesten um die Konvergenz oder Divergenz der hierdurch entstehenden unendlichen

1) Mémoires de l' Académie de Berlin 1749, 278. Man erkennt aus dieser Darstellung, daß weder Euler, noch die übrigen deutschen Mathematiker davon Kenntnis hatten, daß bereits 1722 Cotes in der Harmonia mensurarum die Gleichung $\log^e(\cos x + \sqrt{-1} \sin x) = x\sqrt{-1}$ gegeben hatte. (Bibl. math. II, 1901, 442.) — 2) Novi Comm. Acad. Petr. V, 1754—55, 164. — 3) Euler schreibt stets $\sin \varphi^n$ statt $(\sin \varphi)^n$. — 4) Natürlich sind bei Euler die Reihen in extenso ausgeschrieben.

Reihen zu bekümmern, obwohl er schon 1743 von Nikolaus I Bernoulli auf die Notwendigkeit der Konvergenz-Untersuchungen aufmerksam gemacht worden war.[1] Dadurch gelangt er zu verschiedenen unrichtigen Resultaten, die wir hier nicht weiter anmerken wollen. Dagegen teilen wir noch mit, daß Euler sich auch eine Reihenentwicklung für $\sin^m \varphi \cos^n \varphi$ verschafft und zum Schlusse noch den Satz beweist, daß, wenn man die Summe der Reihe $Z = Az^m + Bz^{m+n} + Cz^{m+2n} + \cdots$ finden kann, auch die Summen

$$S = A \cos m\varphi + B \cos (m+n)\varphi + C \cos (m+2n)\varphi + \cdots,$$

$$T = A \sin m\varphi + B \sin (m+n)\varphi + C \sin (m+2n)\varphi + \cdots$$

bestimmt werden können, wozu er beifügt, daß mit Hilfe dieses Theorems viele Reihen summiert werden können, die nach dem Sinus oder Cosinus der Vielfachen eines Winkels fortschreiten. In den Beispielen, welche er mitteilte, sind zum erstenmal rationale Funktionen des Arguments durch solche Reihen ausgedrückt.

Viele Jahre später (1773 und 1776)[2] kam er wieder auf dieses Theorem zurück. Da aber diese Betrachtungen bereits in die Theorie der Darstellung der Funktionen durch trigonometrische Reihen gehören, die jenseits unseres Planes liegt, so gehen wir nicht weiter darauf ein.[3]

Dagegen wollen wir noch einige Worte über die Summierung der Reihen $\sum_{\mu=0}^{\mu=p-1} \sin(s+\mu u)$ und $\sum_{\mu=0}^{\mu=p-1} \cos(s+\mu u)$ hinzufügen, welche Euler schon 1743 im VII. Bande der Miscellanea Berolinensia (129 ff.) gegeben hatte, da er sie zur Ausführung gewisser Integrale brauchte. Auch auf sie kam er wieder im 14. Kapitel der „Introductio" zurück (§ 258—261), indem er sie als speziellen Fall der unendlichen rekurrenten Reihen $\sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} z^\mu \sin(s+\mu u)$ und $\sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} z^\mu \sin(s+\mu u)$ für $z=1$ auffassen zu dürfen glaubte und ihre Summen als Differenzen zweier in der Tat divergenter unendlicher Reihen erhielt.[4]

1) Corresp. math. v. Fuß II, 708—710. Brief vom 29. November 1743. — 2) Novi Comm. Acad. Petrop. XVIII, 1773, 32 ff. und Nova Acta Acad. Petrop. VII, 87; erst 1789 nach seinem Tode veröffentlicht. Vgl. auch ebenda XI, 1793, 94 und 114. — 3) Vgl. Näheres hierüber bei Reiff, Geschichte der unendlichen Reihen 124—140. — 4) Etwas später als Euler behandelten dieselben Reihen auch Bossut in Mémoires de l'Acad. Paris 1769, Daniel Bernoulli in Novi Comm. Acad. Petr. XVIII, 1773, 3 ff. und Lexell ebenda 37 ff., und letzterer gibt hier gleichzeitig mit Euler (ebenda p. 24) die Summen der Reihen $\sum_{n=1}^{n=n} \sin^\lambda n\varphi$ und $\sum_{n=1}^{n=n} \cos^\lambda n\varphi$.

Diese Untersuchungen über die Funktionen von Winkeln, welche in arithmetischer Progression fortschreiten, veranlaßten ihn später[1]), auch die Beziehungen der Funktionen solcher Winkel zu studieren, die in geometrischer Progression aufeinander folgen, wobei er von dem schon 1737 mitgeteilten Ausdruck[2]) $s = \sin s \sec \frac{s}{2} \sec \frac{s}{4} \cdots$ ausging und Reihen erhielt, die ihm auch zur Berechnung von π dienten.

Eine große Rolle in Eulers analytischen Untersuchungen spielt die Darstellung der trigonometrischen Funktionen durch unendliche Produkte, da er durch sie in den Stand gesetzt wurde, das von Johann Bernoulli gestellte Problem der Summierung der Reihen von der Form $\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^{2m}}$ für ein positives ganzzahliges m vollständig zu lösen. Schon in dem Aufsatze „De summis serierum reciprocarum" 1734—35[3]) bewerkstelligte er die Zerlegung des Sinus in Faktoren. Zunächst betrachtete er die Gleichung $0 = 1 - \frac{s}{y} + \frac{s^3}{3!\,y} - \frac{s^5}{5!\,y} + \cdots$, wo $y = \sin s$ ist, als eine Gleichung von unendlich hohem Grade und zerlegte sie mit Hilfe der seit Moivre bekannten Periodizität des Sinus in das Produkt

$$\left(1 - \frac{s}{A}\right)\left(1 - \frac{s}{p - A}\right)\left(1 - \frac{s}{-p - A}\right)\left(1 - \frac{s}{2p + A}\right)\left(1 - \frac{s}{-2p + A}\right)\cdots,$$

wobei A den kleinsten $\arcsin y$ bedeutete und p noch statt π geschrieben war.[4]) Aus dem Satze über den Zusammenhang der Wurzeln einer Gleichung mit ihren Koeffizienten ergeben sich dann die einfachen symmetrischen Funktionen der ersteren und hieraus mit dem Newtonschen Satze auch die Potenzsummen derselben.

Für den Fall, daß $y = \sin A = 1$, also $A = \frac{\pi}{2}$ war (Euler schreibt dafür q) ließen sich dann unmittelbar die gewünschten Reihensummen durch Potenzen von π darstellen. So ergab z. B. die Summe aller Wurzeln die Leibnizsche Reihe, die Summe der Quadrate derselben

1) Opuscula analytica Petr. 1783 in 4°, 345. — 2) Comm. Acad. Petr. VII, 234—235. Für $s = \frac{\pi}{2}$, welchen Fall Euler zur Berechnung von π auf 5 Dezimalen benützt, geht die obige Faktorenfolge in die schon von Vieta gegebene über. (Siehe I. Teil, S. 172). Euler leitet sie in den Opuscula durch fortgesetzte Anwendung der Formel $\sin s = \sin \frac{s}{2} \cdot \cos \frac{s}{2}$ ab. — 3) Comm. Acad. Petr. VII, 123 ff. — 4) π schreibt Euler zum erstenmal in Comm. Acad. Petr. IX, 165, von wo ab diese Bezeichnung Eingang fand.

die Reihe $\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ u. s. w., und hieraus ließ sich dann auch leicht die Summe der Reihe $\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^{2m}}$ gewinnen.[1]) Von größerem Interesse als diese Folgerungen ist aber für uns die direkte Darstellung des Sinus als ein unendliches Produkt, welches Euler diesen Entwicklungen anschloß. Die Reihe $y = s - \frac{s^3}{3!} + \frac{s^5}{5!} - \frac{s^7}{7!} + \cdots$ gibt nämlich für $y = 0$ $0 = s\left(1 - \frac{s^2}{3!} + \frac{s^4}{4!} - \frac{s^6}{6!} + \cdots\right)$ und da die Bögen, deren Sinus gleich Null sind, $\pi, -\pi; 2\pi, -2\pi; 3\pi, -3\pi \ldots$ heißen, so ist nach dem gleichen Prinzip

$$\sin s = s\left(1 - \frac{s^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{s^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{s^2}{9\pi^2}\right) \cdots$$

Obwohl Nikolaus I Bernoulli Euler in zwei Briefen[2]) darauf aufmerksam machte, daß diese Ableitungen keineswegs einwandfrei seien, indem weder die Konvergenz der Sinusreihe bewiesen sei, noch die Sätze über Gleichungen von endlichem Grade sich unmittelbar auf einen unendlich hohen Grad ausdehnen ließen, so hat doch Euler diese Schlußweise auch später beibehalten; so in zwei Aufsätzen von 1740 und 1743[3]), wo er unendliche Produkte für $\sin \frac{m}{n}\pi$, $\cos \frac{m}{n}\pi$ herstellte, als auch in der „Introductio", wo ebenfalls die Potenzreihen als Gleichungen von unendlich hohem Grade aufgefaßt wurden. Doch hat er in dem letzteren Werke die Aufstellung der Produktentwicklungen in der Weise modifiziert, daß er zunächst die hyperbolischen Funktionen $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$ und $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$ in Produkte zerspaltete und dann für x xi setzend zu den trigonometrischen Funktionen überging.[4])

Setzte er dann im speziellen $x = \frac{m\pi}{2n}$, so ergaben sich die Faktoren-

1) Daß Euler und nicht Johann Bernoulli, der ebenfalls von der Produktzerlegung ausging, der Entdecker dieser Reihensummen ist, hat Eneström festgestellt: Bibliotheca math. 1890, 22—24. Siehe auch Anmerk. 1 Seite 106. — 2) Brief vom 24. Oktober 1742. Corresp. math. (Fuß) II, 691 und vom 6. April 1743, ebenda 701—702. Einen Einwand gegen die Exaktheit von Eulers Beweis für die Produktzerlegung erhob auch Pfaff und gab eine andere Methode an. Versuch einer neuen Summationsmethode, Berlin 1780, 87—90. — 3) Der erste führt den Titel: „De seriebus quibusdam considerationes." Comm. Acad. Petrop. XII, 1740, 53 ff.; der zweite: „Theoremata circa reductionem integralium ad quadraturam circuli". Miscell. Berol. VII, 91 ff. — 4) A. a. O. Kap. 9, § 155. Der Gedankengang dieses Beweises rührt übrigens von Nikolaus Bernoulli her, welcher ihn Euler in einem Briefe vom 24. Oktober 1742 angab, Correspondance II, 692—694.

darstellungen von $\sin\frac{m\pi}{2n}$ und $\cos\frac{m\pi}{2n}$, denen sich noch zwei andere zugesellten, wenn man $n-m$ statt m schrieb (§ 184), und aus ihnen folgten entsprechende Darstellungen der andern vier Funktionen (§ 186), sowie bequeme Reihen zur Berechnung der Logarithmen der Sinus und Cosinus von $\frac{m}{n}\,90^0$, die Euler bis zur 30., beziehungsweise 38. Potenz von $\frac{m}{n}$ fortführte und die Reihenkoeffizienten auf 20 Dezimalen berechnete.

Auch das Multiplikations- und Teilungsproblem der trigonometrischen Funktionen behandelte er in der „Introductio“ (Kap. 14) eingehend, indem er zunächst die von Newton (S. 68) und Jakob Bernoulli (S. 70) bereits gegebene Gleichung n. Grades (n ungerade) aus dem Additionstheorem herstellte und das Gleichungspolynom in n Faktoren zerlegte (§ 237). In ähnlicher Weise verschaffte er sich dann auch die Gleichung für ein gerades n, quadrierte sie, um sie rational zu machen, und fand die $2n$ Wurzeln $\pm\sin z$, $\pm\sin\left(\frac{\pi}{n}-z\right)$, $\pm\sin\left(\frac{2\pi}{n}-z\right)$, $\pm\sin\left(\frac{3\pi}{n}-z\right)\cdots$; endlich stellt er ebenso $\cos nz$ durch das Produkt der Wurzeldifferenzen dar.

Für die Tangente ergab ihm dasselbe Verfahren, das schon 10 Jahre früher J. Machin angewendet hatte, die (S. 74) von uns mitgeteilte Gleichung, die ihm dann die Teilungsgleichung

$$0 = 1 - \frac{nt}{\operatorname{tg} nz} - \frac{n(n-1)t^2}{1\cdot 2\cdot \operatorname{tg} nz} + \frac{n(n-1)(n-2)t^3}{1\cdot 2\cdot 3\operatorname{tg} nz} + \cdots \quad (t = \operatorname{tg} z)$$

mit den Wurzeln $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}-z\right)$, $\operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{n}-z\right)\cdots$, n an der Zahl, lieferte (§ 249—250). Später[1]) kam er nocheinmal auf diese Zerlegung zurück, indem er sie von einem andern Gesichtspunkte ausgehend wieder herstellte.

§ 2. Methoden zur Berechnung der Zahl π und zyklometrische Untersuchungen.

Was das Problem der Kreisquadratur anlangt, so hat ihm Euler, wie nicht anders zu erwarten, seine volle Aufmerksamkeit geschenkt, sei es daß er Reihendarstellungen der Zahl π gelegentlich bei seinen zahllosen analytischen Untersuchungen fand, sei es daß er direkt auf eine möglichst praktische Berechnung dieser Zahl ausging. Dabei war er keineswegs, wie Gregory und andere, von der Unmöglichkeit

1) De multiplicatione angulorum per factores expedienda 1776. Nova Acta Acad. Petrop. V, 1787.

der Lösung des Problems überzeugt, indem er einmal ganz richtig bemerkte[1]), daß bisher ja noch kein Beweis für die Irrationalität von π erbracht sei. In dem Berichte über die vielen Arbeiten des großen Analytikers, die sich auf die hier einschlägigen Fragen beziehen, müssen wir uns jedoch große Beschränkung auferlegen, da dieses Gebiet, so interessant es ist, erst in zweiter Linie in den Plan unseres Werkes gehört.

Schon in Eulers erstem Aufsatze über die Reihenlehre von 1730/31[2]) findet sich die Produktformel von Wallis (S. 59) als ein spezieller Fall ($n = \frac{1}{2}$) des in der Form $\frac{1^{1-n}\cdot 2^n}{1+n}\cdot\frac{2^{1-n}\cdot 3^n}{2+n}\cdot\frac{3^{1-n}\cdot 4^n}{3+n}\cdot\frac{4^{1-n}\cdot 5^n}{4+n}\cdots$ geschriebenen allgemeinen Termes der Reihe $1 + 2! + 3! + \cdots n! + \cdots$ erkannt, und die Betrachtungen über die Beta- und Gammafunktionen, welche er hier zum erstenmal anstellt, liefern ihm für denselben Ausdruck das Integral $\int_0^1 dx\sqrt{-\log x} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$; zugleich gibt er in einem Briefe vom 17. Oktober desselben Jahres an Goldbach[3]) den jedenfalls aus diesen Betrachtungen hervorgegangenen Näherungswert $\pi = 4\,(1+n)\frac{4\cdot 16\cdot 36\cdots 4n^2}{9\cdot 25\cdot 49\cdots(2n+1)^2}\sqrt{\frac{2n+2}{2n+3}}$, welcher um so genauer ist, je größer n gewählt wird. Dann aber finden sich in Abhandlungen von 1734/35, 1740 und 1743[4]), auf welche wir uns schon früher bezogen haben, aus den Produktentwicklungen der trigonometrischen Funktionen jene Formeln für die Potenzen von π abgeleitet, die sich als unendliche Potenzsummen der reziproken Werte der natürlichen Zahlen darstellen. Diese Formeln wurden unter Beifügung ähnlicher Reihen auch in der „Introductio" wiederholt (Kap. 9, § 168—180), aber auch die Faktorenfolge von Wallis und eine Reihe ähnlicher Ausdrücke finden sich hier (§ 185) angemerkt, indem sie sich direkt aus jenen Produktentwicklungen ergeben.

Ebenso enthält ein Aufsatz vom Jahre 1737[5]) eine Menge von Reihen und Produktentwicklungen für π, welche zum größten Teile aus Primzahlen gebildet sind; so z. B. leitet dort Euler die merkwürdige Formel ab:

$$\frac{2^n\cdot 3^n\cdot 5^n\cdot 7^n\cdot 11^n\cdots}{(2^n-1)(3^n-1)(5^n-1)(7^n-1)(11^n-1)\cdots} = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \cdots,$$

1) Considerationes cyclometricae. Novi Comm. Acad. Petr. XVI, 1771, 169. — 2) Comm. Acad. Petr. 1730—31, V, 36—57. — 3) Correspondance math. (Fuß) I, 47. — 4) Comment. Acad. Petr. VII, 123—134 und XII, 53 ff. Miscellanea Berolin. VII, 91 ff. und 172 ff. — 5) Variae observationes circa series infinitas. Comm. Acad. Petr. IX, 160 ff. Auch „Introductio", Kap. 15, § 288—295 und Brief an Goldbach vom 5. Aug. 1752. Correspondance math. (Fuß) I, 576—578.

die ihm, da er die Reihe rechts für gerade n bereits summiert und dafür $\lambda_n \frac{2^{n-2}\pi^n}{(n+1)!}$ gefunden hatte[1]), eine Menge neuer Produktentwicklungen für π bot. In dem gleichen Jahre leitete er in einem Aufsatze über Kettenbrüche[2]) Lord Brounckers Darstellung von π ab (S. 59) und gab auch Kettenbruchentwicklungen für e, $\sqrt{e}$, $\frac{1}{2}(\sqrt{e}-1)$ u. s. w. Aber auch die Methode Machins (S. 80) zur Berechnung von π griff er hier[3]) wieder auf und erweiterte sie wie folgt. Zunächst ist zu bemerken, daß Euler für „arctg" die Bezeichnung A. t. einführte, für die er dann später beständig A. tang. schrieb.[4]) Ebenso bezeichnete er die übrigen zyklometrischen Funktionen, indem er den trigonometrischen ein A. vorsetzte; diese Bezeichnungsweise markierte auch ganz gut den Charakter der Umkehrfunktion, da Euler tang $A \cdot z$, sin $A \cdot z$ u. s. w. zu schreiben gewohnt war.

Aus dem Additionstheorem für die Tangente leitet er dann die allgemeine Formel ab $A \cdot t \cdot \frac{1}{p} = A \cdot t \cdot \frac{1}{p+q} + A \cdot t \cdot \frac{q}{p^2+pq+1}$ und führt darin spezielle Zahlenwerte für p und q ein, dadurch erhält er, die Arcustangens-Reihe benützend, Machins und andere bequeme Formeln zur Berechnung von π mittelst rationaler Tangenten. Darauf entwickelt er die allgemeinere Gleichung $A \cdot t \cdot \frac{x}{y} = A \cdot t \cdot \frac{ax-y}{ay+x} + A \cdot t \cdot \frac{1}{a}$ und aus dieser successive die unendliche Reihe $A \cdot t \cdot \frac{x}{y} = A \cdot t \, \frac{ax-y}{ay+x}$ $+ A \cdot t \cdot \frac{b-a}{ab+1} + A \cdot t \cdot \frac{c-b}{cb+1} + \cdots$, die z. B. für $\frac{x}{y} = 1, a, b, c \cdots$ gleich den ungeraden Zahlen der Zahlenreihe:

$$\frac{\pi}{4} = A \cdot t \cdot \frac{1}{2} + A \cdot t \cdot \frac{1}{2 \cdot 4} + A \cdot t \cdot \frac{1}{2 \cdot 9} + A \cdot t \cdot \frac{1}{2 \cdot 16} + \cdots$$

liefert.

Später[5]) kam er noch einmal auf diese Reihe zurück und leitete aus ihr eine Unzahl anderer ab, die ihm im speziellen wieder Reihen für π ergaben.

Im Jahre 1739 erschienen zwei Aufsätze[6]) aus Eulers Feder,

---

1) Die Faktoren λ_n hängen von den sogenannten Bernoullischen Zahlen ab, die Jakob Bernoulli in seiner Ars conjectandi (nach seinem Tode von seinem Neffen Nikolaus I Bernoulli 1713 veröffentlicht) p. 96 gegeben hatte. — 2) Comm. Acad. Petr. IX, 1737, 100. — 3) De variis modis circuli quadraturam numeris proxime exprimendi. Ebenda 222. — 4) Nova Acta Erud. 1744, 315 steht A. tag̃. — 5) De progressionibus arcuum circularium quorum tangentes secundum certam legem procedunt. Novi Comm. Acad. Petr. IX, 1762—63, 40—52. J. F. Pfaff hat 1797 eine ausführliche Abhandlung über solche Reihen geschrieben: Disquisitiones Analyticae. Helmstadii in 4° I, 1—132. — 6) „De productis ex infinitis factoribus ortis" und „De fractionibus continuis" in Comm. Acad. Petrop. XI, 3 und 32.

welche Untersuchungen über die Betafunktionen enthielten, die teils in unendliche Produkte, teils in Kettenbrüche entwickelt wurden und gelegentlich zu neuen Darstellungen von π Anlaß gaben, und der gleiche Band der Petersburger Kommentarien enthält einen dritten Aufsatz[1]): „Consideratio progressionis cujusdam ad circuli quadraturam inveniendam idonea“, in welchem zum erstenmal eine halbkonvergente Reihe auftritt, deren er sich ebenfalls zur Berechnung von π bedient.

Ferner existieren noch einige posthume Arbeiten Eulers, in welchen er ebenfalls darauf ausgeht, eine möglichst rasch konvergente Reihenentwicklung für π zu erhalten. In der einen von 1779[2]) bildet er die Abgeleiteten der Arcustangens-Reihe und stellt zwischen ihnen ein Rekursionsgesetz her, welches ihm schließlich die Reihe

$$\operatorname{arctg} t = \frac{t}{1+t^2}\left\{1 + \frac{2}{3}\left(\frac{t^2}{1+t^2}\right) + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)^2 + \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}\left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)^3 + \cdots\right\}$$

liefert. Führt man diese Reihe in die Gleichung $\pi = 20 \operatorname{arctg} \frac{1}{7} + 8 \operatorname{arctg} \frac{3}{79}$ ein, so ergibt sich die Entwicklung:

$$\pi = \frac{28}{10}\left(1 + \frac{2}{3}\left(\frac{2}{100}\right) + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\left(\frac{2}{100}\right)^2 + \cdots\right)$$
$$+ \frac{30336}{100000}\left(1 + \frac{2}{3}\left(\frac{144}{100000}\right) + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\left(\frac{144}{100000}\right)^2 + \cdots\right),$$

welche allerdings sehr rasch zum Ziele führt. Übrigens war Euler nicht der Erste, der diese Darstellung von π veröffentlichte, vielmehr teilte sie bereits drei Jahre früher Charles Hutton der Royal Society mit.[3])

In einem anderen Aufsatze vom Jahre 1779[4]) bildete Euler die leicht zu beweisende Gleichung

1) Comm. Acad. Petrop. XI, 116—127. Die ganze Rechnung findet sich bei Cantor III, 2, 672—674 mitgeteilt. Euler erhielt mit seiner Reihe π auf 15 Dezimalen richtig. Vgl. über diese Art, π zu bestimmen, auch den Brief Eulers an Goldbach vom 9. April 1743. Corresp. math. (Fuß) I, 220—222, sowie den Brief vom 28. Mai 1746, wo er die Reihe $\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{3}$ vorschlägt. — 2) Investigatio quarundam serierum etc. Nova Acta Acad. Petrop. XI, 1793, 133 ff., gelesen am 7. Juni 1779. In einem andern posthumen Aufsatze, der erst 1862 veröffentlicht wurde (Opera posthuma L. Euleri. P. H. Fuß et Nic. Fuß I, 288), wird dieselbe Reihe noch auf einem etwas anderen Wege abgeleitet. Er sagt dort, daß er mit ihr in Zeit von einer Stunde π auf 20 Dezimalen berechnet habe. — 3) Philosophical Tr. 1776, 476. Später wurde dieselbe Reihe für $\operatorname{arctg} t$ auf anderem Wege abgeleitet von James Thomson in Edinburgh Philosophical Trans. V, 1840, 217—223 und dann wieder neu gefunden von De Morgan in Cambridge Trans. XI, 1866, 232, sowie von Blissard und Frisby. Vgl. hierüber J. W. L. Glaisher in Messenger of Mathem. II, 1873, 119 ff. — 4) Gelesen am 17. Juni 1779, Nova Acta Petrop. XI, 1793, 150.

$$\operatorname{arctg}\frac{x}{2-x} = 2\int_0^x \frac{dx}{4+x^4} + 2\int_0^x \frac{x\,dx}{4+x^4} + \int_0^x \frac{x^2\,dx}{4+x^4},$$

entwickelte diese Integrale in Reihen, setzte $x=\frac{1}{2}$ und $x=\frac{1}{4}$ und erhielt dadurch Reihen für $\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$ und $\operatorname{arctg}\frac{1}{7}$, welche in die Gleichung $\frac{\pi}{4} = 2\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{7}$ eingeführt, ebenfalls einen zur Berechnung von π praktischen Ausdruck lieferten.

Aber Euler war nicht nur bestrebt, neue Mittel zur näherungsweisen Lösung des Problems der Kreismessung zu finden, er interessierte sich auch für die Versuche, die in früherer Zeit gemacht worden waren, und suchte sie mit den von ihm geschaffenen analytischen Hilfsmitteln näher zu beleuchten. So hat er schon 1730 in einem Briefe an Goldbach[1]) die Methode des Gregorius a St. Vincentio (S. 58) in eine Formel umgesetzt, welche lautet $\frac{p}{d} = \frac{3(1+A)\sqrt{3}}{2(2A-1)}$, $A = \left(\frac{11}{5}\right)^{\frac{\log\frac{11}{5}}{\log\frac{203}{53}}}$. Dieser Ausdruck, sagt er, nähert sich an $\frac{22}{7}$ an „et si vera esset (nämlich, daß der Ausdruck den Kreis exakt quadrierte), magnum sane esset inventum". Außerdem fand er bei Cartesius eine Kreisrektifikation, die ihn zu einer äußerst interessanten Abhandlung veranlaßte.[2])

Descartes stellt sich das Problem (Oeuvres Ed. Cousin XI, 442—443), einen Kreis zu konstruieren, dessen Umfang gleich dem eines gegebenen Quadrates ist. Hierzu legt er an das Quadrat $\overline{bf}$ (Fig. 19) das Rechteck $\overline{cg}$, dessen vierte Ecke g auf der Diagonale liegt, und dessen Fläche gleich $\frac{1}{4}$ des Quadrates ist, an, an dieses wieder ein Rechteck $\overline{dh} = \frac{1}{4}$ des vorhergehenden, u. s. w. Dadurch gelangt er schließlich zu einem Grenzpunkt x, der so liegt, daß ax gleich dem Durchmesser des gesuchten Kreises wird. Dabei gibt er an, daß ab der Durchmesser des dem Quadrate eingeschriebenen Kreises, ac der Durchmesser des dem Achteck eingeschriebenen, ad jener des dem 16-Eck eingeschriebenen Kreises u. s. w. ist, so daß endlich ax der Durchmesser des dem Polygon mit un-

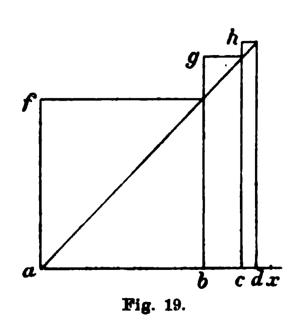


Fig. 19.

1) Corresp. math. (Fuß) I, 24. p ist hier die Peripherie des Kreises, dessen Durchmesser d ist. — 2) Annotationes in locum quendam Cartesii ad circuli quadraturam spectantem. N. Comm. VIII, 1760—1761, 157 ff. — Später gab einen Beweis dieser Konstruktion auch Fr. de Tuschio a Fagnano. Acta Eruditorum 1771, 406—418.

endlich vielen Seiten eingeschriebenen Kreises, d. h. der gesuchte Kreisdurchmesser selbst wird. Euler beweist nun zunächst die Richtigkeit dieser Konstruktion und leitet dann aus ihr die Formel $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{\pi}{16}+\frac{1}{8}\operatorname{tg}\frac{\pi}{32}+\cdots=\frac{4}{\pi}$ ab. Diese Reihe gibt ihm aber sofort Veranlassung, die Summe der allgemeineren Reihe $\operatorname{tg}\varphi+\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}+\frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{4}+\cdots$ zu suchen, die er auch leicht in der Form $\frac{1}{\varphi}-2\operatorname{ctg}2\varphi$ findet. Aus dieser Gleichung wird dann eine Menge anderer Reihen abgeleitet und dabei auch die Faktorenfolge

$$\frac{2\varphi}{\sin 2\varphi}=1:\left(\cos\varphi\cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{4}\cos\frac{\varphi}{8}\cdots\right)$$

gewonnen, die im speziellen für $\varphi=\frac{\pi}{4}$ jene schon von Vieta in etwas anderer Gestalt gefundene Beziehung liefert (I. Tl. S. 172.) Übrigens hatte Euler dieselbe schon 1737 auf eine andere Weise gelegentlich entwickelt.[1])

Endlich hat er noch in der „Introductio" B. II ein eigenes Kapitel (22) eingeschaltet, in welchem er gewisse transzendente Gleichungen, ähnlich jener des Keplerschen Problems, mittelst der Regula falsi zu lösen lehrt. So findet er z. B. den Bogen s aus der Gleichung $s=\cos s$, aus $s=\sin 2s$, aus $s-\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}\sin 2s$ u. s. w.[2]), und gemäß der Schlußbemerkung des Kapitels 22 hat er diese Aufgaben erdacht, um die Natur des Kreises, dessen Quadratur bisher auf keinem Wege habe gelingen wollen, besser zu beleuchten. „Denn," sagt er, „hätte sich bei der Auflösung einer dieser Aufgaben ein zur ganzen Peripherie kommensurabler Bogen ergeben, oder hätte man seinen Sinus oder seine Tangente durch den Halbmesser konstruieren können, so wäre damit allerdings in gewissem Sinne die Quadratur des Kreises gefunden. — Es ist aber auch noch kein Grund da, welcher die Unmöglichkeit dieser Quadratur beweisen könnte, und wenn dieselbe

---

1) In dem schon S. 114 besprochenen Aufsatze: De variis modis circuli quadraturam numeris proxime exprimendi. Vgl. auch S. 110, Anm. 2. — J. Schwab hat diese Konstruktion in seinen Élémens de géométrie, Nancy 1813, 104 wieder neu gefunden; Gergonne teilte sie dann vollständiger 1815 mit: Annales de Mathém. VI, 192—200 und XVII, 1826. Ebenso Vincent in seinem Cours de Géométrie (siehe Archiv für Mathem. VI, 331). Abermals neu entdeckt wurde sie von Catalan 1842: Nouvelles Annales I, 190 und aus ihr Vietas Formel abgeleitet, dann berechnete Matzka 1847, im Archiv für Mathem. IX, 74—82, $\frac{1}{\pi}$ mit dieser Methode auf 6 Dezimalen, ferner behandelte sie Zerlang (ohne Kenntnis der Vorgänger) in der Zeitschr. für mathem. Unterricht II, 1871, 339—340. — 2) Vgl. auch Considerationes cyclometricae. Novi Comm. Acad. Petr. XVI, 160.

möglich ist, so scheint kein Weg, sie zu entdecken, passender als der, welchen wir in diesem Kapitel eingeschlagen haben." Ähnliche Betrachtungen stellte Euler auch noch später (1771)[1]) an, nachdem Lambert bereits die Irrationalität von π exakt bewiesen hatte, und hob hervor, daß auch dieser Umstand noch nicht die Unmöglichkeit der Quadratur dartue.

§ 3. Eulers Arbeiten über sphärische Trigonometrie.

Für sphärische Trigonometrie hat sich Euler ganz besonders interessiert und versucht, auf zwei wesentlich verschiedene Arten die Formelsysteme derselben aus einheitlichen Gesichtspunkten abzuleiten.

Die erste diesbezügliche Abhandlung ist vom Jahre 1753, führt den Titel „Principes de la trigonométrie sphérique tirés de la méthode des plus grands et des plus petits" und erschien 1755 im IX. Bande der Berliner Memoiren (223—257).[2])

Schon 1728 hatte Euler[3]), von Johann Bernoulli darauf hingewiesen, das Problem der kürzesten Linien behandelt, und es war längst allgemein bekannt, daß diese Linien auf der Kugelfläche durch größte Kreise dargestellt werden. Da nun auch ein sphärisches Dreieck aus Bögen größter Kreise gebildet wird, so schloß Euler, daß man die allgemeinste Trigonometrie auf der Kugel erhalten werde, wenn man mittelst der Methode der Maxima und Minima zwischen den Seiten und Winkeln eines aus kürzesten Linien gebildeten Dreiecks Beziehungen herzustellen imstande ist. Der Vorteil dieser Methode besteht dann darin, daß sie nicht nur die ebene Trigonometrie für einen unbegrenzt wachsenden Kugelradius umschließt, sondern auch auf beliebige Oberflächen angewendet werden kann. Und in der Tat hat Euler seinem Aufsatze sofort einen zweiten über die sphäroidische Trigonometrie folgen lassen.

Diesen damals völlig neuen Gedanken benutzt Euler dazu, um zunächst die Formeln für das rechtwinklige und dann jene für das schiefwinklige Dreieck zu erhalten.

1) Erst 1839 hat A. Steinberger in einer eigenen Schrift die Verhältnisse irgend einer trigonometrischen Funktion zu ihrem Bogen durch Reihen dargestellt und gezeigt, wie man hieraus den Bogen oder die Funktion finden kann (Das Verhältnis des Kreisbogens zu seinen zuständigen trigonometrischen Funktionen vollständig bearbeitet. Regensburg 1839, 8°). — 2) Eine deutsche Übersetzung von E. Hammer erschien in Ostwalds Klassikern der exakten Wissenschaften Nr. 73. — 3) Comm. Acad. Petr. III, 110—124, erschienen 1732. Über die Geschichte dieses Problems siehe Cantor III, 2, 843—846 und G. Eneström in Biblioth. math. 1899, 19—24.

Ist in Fig. 20 AB der Äquator, OP ein Meridian und AM eine kürzeste Linie, so hat man das sphärische bei P rechtwinklige Dreieck APM, dessen Seiten $AP = x$, $PM = y$ und $AM = s$ seien, während $\measuredangle\, MAP = \zeta$, $\measuredangle\, AMP = \vartheta$ ist. Geht man zum unendlich benachbarten Meridian Omp über, so ist

$$ds = \sqrt{(dy)^2 + (dx \cos y)^2},$$

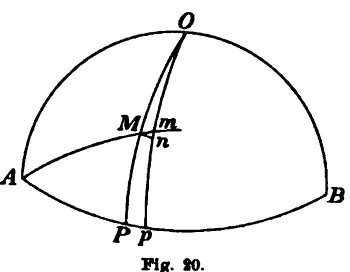


Fig. 20.

und man hat das Integral dieses Ausdruckes zu einem Minimum zu machen. Das liefert in bekannter Weise eine Differentialgleichung 2ter Ordnung, deren erstes Integral $dx = \frac{C\,dy}{\cos y \sqrt{\cos^2 y - C^2}}$ ist, wodurch man sofort noch $ds = \frac{dy \cos y}{\sqrt{\cos^2 y - C^2}}$ erhält. Für $y = 0$ bekommt man hieraus

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} PAM = \operatorname{tg} \zeta = \frac{\sqrt{1 - C^2}}{C}, \quad \sin \zeta = \sqrt{1 - C^2}, \quad \cos \zeta = C.$$

Ferner ist $\frac{Mn}{mn} = \operatorname{tg} AMP = \operatorname{tg} \vartheta = \frac{C}{\sqrt{\cos^2 y - C^2}}$, und diese beiden Winkel in die Gleichungen eingeführt, liefern die Beziehungen:

$$dx = \frac{dy \cos \zeta}{\cos y \sqrt{\cos^2 y - \cos^2 \zeta}} \quad \text{und} \quad ds = \frac{dy \cos y}{\sqrt{\cos^2 y - \cos^2 \zeta}}$$

einerseits und

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{\cos \zeta}{\sqrt{\cos^2 y - \cos^2 \zeta}}, \quad \sin \vartheta = \frac{\cos \zeta}{\cos y}, \quad \cos \vartheta = \frac{\sqrt{\cos^2 y - \cos^2 \zeta}}{\cos y}$$

andererseits.

Die beiden ersten Gleichungen geben dann, zum zweitenmal integriert, $\sin x = \frac{\cos \zeta \sin y}{\sin \zeta \cos y}$ und $\cos s = \frac{\sqrt{\cos^2 y - \cos^2 \zeta}}{\sin \zeta}$, aus denen man noch die Werte für $\cos x$ und $\operatorname{tg} x$, für $\sin s$ und $\operatorname{tg} s$ bestimmen kann. Hierdurch ergeben sich im Vereine mit den eben erhaltenen drei Beziehungen im ganzen 9 Gleichungen, aus denen Euler noch durch Elimination der einzigen Wurzel, die in ihnen vorkommt, und passende Kombination folgende 10 Relationen gewinnt:

I. $\cos s = \cos x \cos y$, II. $\cos \vartheta = \sin \zeta \cos x$, III. $\operatorname{tg} x = \cos \zeta \operatorname{tg} s$,
IV. $\operatorname{tg} x = \sin y \operatorname{tg} \vartheta$, V. $\operatorname{tg} y = \sin x \operatorname{tg} \zeta$, VI. $\sin y = \sin \zeta \sin s$,
VII. $\cos s \operatorname{tg} \zeta \operatorname{tg} \vartheta = 1$, VIII. $\operatorname{tg} y = \cos \vartheta \operatorname{tg} s$,
IX. $\cos \zeta = \sin \vartheta \cos y$, X. $\sin x = \sin \vartheta \sin s$.

Und nun kommt jener ebenso einfache, wie durch seine Tragweite bedeutende Gedanke, das Dreieck mit ABC, die

Winkel desselben mit A, B, C, und die ihnen bezüglich gegenüberliegenden Seiten mit a, b, c zu bezeichnen.[1]) Setzt man demgemäß $s = c$, $x = b$, $y = a$, $\zeta = A$, $\vartheta = B$, $P = C\ (= 90^0)$, so gehen die eben mitgeteilten 10 Relationen in die bekannten 10 Gleichungen der Neperschen Regel über. Euler stellt diese Formeln tabellarisch zusammen und zieht aus ihnen die bekannten 6 verschiedenen Fundamentalgleichungen des sphärischen rechtwinkligen Dreiecks heraus. Dann bestimmt er noch den Inhalt des Dreiecks, indem er das Flächendifferential $PMmp = dx \sin y$ integriert.[2]) Eine einfache Rechnung liefert $\vartheta + \zeta - 90^0 = \triangle APM$ für die Kugel mit dem Radius 1, und hieraus folgt auch leicht die Fläche eines beliebigen sphärischen Dreiecks, da man ja dasselbe durch einen senkrechten Bogen in zwei rechtwinklige zerlegen kann.

Jetzt wendet sich Euler zu der allgemeineren Aufgabe: „Auf der Oberfläche einer Kugel sind zwei Punkte E und M gegeben, man soll die kürzeste Linie EM zwischen diesen beiden Punkten bestimmen.“

Man ziehe die beiden Meridiane OE und OM (Fig. 21) und lasse EM um die unendlich kleine Größe Mm wachsen; ist dann $OE = a$, $\sphericalangle E = \alpha$, $EM = s$, $OM = x$, $\sphericalangle EOM = y$, $\sphericalangle EMO = \varphi$, so hat man $\operatorname{tg} \varphi = \frac{Mn}{mn} = \frac{dy \sin x}{dx}$, $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy \sin x)^2}$ und muß das Integral von ds zu einem Minimum machen. Dadurch erhält man auf bekannte Weise $\frac{dy \sin^2 x}{\sqrt{dx^2 + (dy \sin x)^2}} = C$

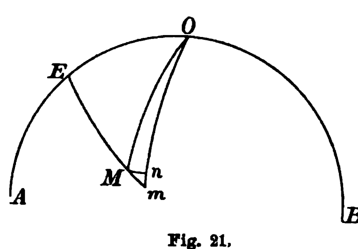


Fig. 21.

oder $\frac{dy \sin^2 x}{ds} = \sin x \sin \varphi = C$, wo C eine Konstante ist, die sich aus der Bemerkung, daß für $y = 0$, $x = a$, $\varphi = 180^0 - \alpha$ werden muß, gleich $\sin a \sin \alpha$ ergibt. Aus dieser Differentialgleichung folgt einmal $dy = \frac{C dx}{\sin x \sqrt{\sin^2 x - C}}$ und dann $ds = \frac{dx \sin x}{\sqrt{\sin^2 x - C^2}}$, welche beiden Gleichungen durch Integration

1) Es ist dies die erste Stelle, an welcher Euler die neue Bezeichnung einführt. Daß er sie schon vor 1753 gehabt hat, ist wohl möglich, aber einen Beweis hierfür konnten wir nicht finden. Daß er sie in der ebenen Trigonometrie schon in einer Vorlesung in Berlin eingeführt habe, geht nicht, wie R. Wolf und nach ihm E. Hammer behaupten, aus L. Bertrands Darstellung (Developpement de Géométrie, Genf 1778, 2 Bde) hervor, wie eine aufmerksame Lektüre der Einleitung dieses Werkes zeigt. — 2) Wie es scheint ohne Kenntnis von Eulers Ableitung hat zehn Jahre später der Schwede Wallenius eine ähnliche Ableitung gegeben: Schwedische Akademieabhandlungen 1763, 68.

$$y = -\arccos\frac{\sqrt{\sin^2 x - C^2}}{\sin x\sqrt{1 - C^2}} + \arccos\frac{\sqrt{\sin^2 a - C^2}}{\sin a\sqrt{1 - C^2}}$$

und

$$s = -\arcsin\frac{\cos x}{\sqrt{1 - C^2}} + \arcsin\frac{\cos a}{\sqrt{1 - C^2}}$$

liefern, wo die rechts hinzugefügten Konstanten so gewählt sind, daß für $y = 0$, $s = 0$, $x = a$ wird. Vereinigt man hier die beiden arc. und führt für C seinen Wert ein, so erhält man mit Beachtung, daß durch die Gleichung

$$C = \sin x \sin \varphi = \sin a \sin \alpha,\ \sqrt{\sin^2 x - C^2} = \sin x \cos \varphi$$

wird, folgende 5 Fundamentalgleichungen:

$$\begin{aligned}
&\text{I. } (1 - C^2)\sin y = \sin\alpha\cos a\cos\varphi + \cos a\cos x\sin\varphi,\\
&\text{II. } (1 - C^2)\cos y = -\cos\alpha\cos\varphi + \sin\alpha\cos a\cos x\sin\varphi,\\
&\text{III. } (1 - C^2)\sin s = \cos a\sin x\cos\varphi + \sin a\cos\alpha\cos x,\\
&\text{IV. } (1 - C^2)\cos s = -\sin a\cos\alpha\sin x\cos\varphi + \cos a\cos x,\\
&\text{V. } \sin x\sin\varphi = \sin a\sin\alpha.
\end{aligned}$$

Euler zeigt nun, wie man aus diesen 5 Gleichungen durch praktische Kombination vier andere ableiten kann, die ihnen völlig äquivalent sind und für die Bezeichnung $a = c$, $x = b$, $s = a$; $y = A$, $\alpha = B$, $\varphi = C$ folgendermaßen lauten:

$$\begin{aligned}
&1)\ \sin a : \sin A = \sin b : \sin B = \sin c : \sin C,\\
&2)\ \cos C = \cos c \sin A \sin B - \cos A \cos B,\\
&3)\ \cos c = \cos C \sin a \sin b + \cos a \cos b,\\
&4)\ \sin a \operatorname{tg} C - \sin B \operatorname{tg} c = \cos a \cos B \operatorname{tg} C \operatorname{tg} c,
\end{aligned}$$

denen er noch die durch zyklische Vertauschung der Buchstaben daraus abzuleitenden hinzufügt. Ersetzt man in der letzten Gleichung die Tangenten durch die Cotangenten, die Euler in diesem Aufsatze mit Absicht vermeidet, so erhält man den dritten Hauptsatz der sphärischen Trigonometrie, den wir zum erstenmal bei Vieta auftreten sahen (Tl. I, 182)[1]; aber Euler hat nicht beachtet, daß dieser Satz nicht nur zu den durch zyklische Vertauschung aufstellbaren, sondern noch zu drei weiteren Gleichungen Anlaß gibt, die aus 4) durch Vertauschung von a mit b und B mit A und darauffolgende zyklische Permutation erhalten werden können; diese Lücke ergänzte er in seinem zweiten Aufsatze (§ 9).

Der Aufstellung dieser Formelsysteme folgt ihre Anwendung zur

---

1) Übrigens bringt Euler die Cotangentenformel in Aufgabe VIII in der wenig verschiedenen Form: $\operatorname{tg} C = \frac{\sin A \operatorname{tg} c}{\sin b - \operatorname{tg} c \cos b \cos A}$.

Auflösung der sechs Fundamentalaufgaben der sphärischen Trigonometrie, wobei er eine Reihe verwendbarer Gleichungsformen aus ihnen ableitet. So bietet ihm die Aufgabe, aus den drei Seiten die Winkel zu bestimmen, die Gelegenheit, die schon von Neper in Worten gegebenen logarithmierbaren Formeln für $\sin\frac{A}{2}$, $\cos\frac{A}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{A}{2}$ abzuleiten, wobei nur auffällt, daß er nicht, wie ja schon Caswell getan hatte, für $\frac{1}{2}(a+b+c)$ ein eigenes Zeichen einführt. Aus diesen Formeln gewinnt er dann auch die beiden Neperschen Analogieen für die Tangente der halben Winkelsumme, beziehungsweise der halben Winkeldifferenz. Ebenso erhält Euler bei Behandlung der polaren Aufgabe die Formeln des Halbseitensatzes, d. h. die logarithmierbaren Ausdrücke für $\sin\frac{a}{2}$, $\cos\frac{a}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$ und aus diesen unter anderen die beiden Neperschen Analogieen für die Tangenten der halben Summe, beziehungsweise der halben Differenz zweier Seiten. Damit hatte er sich die Mittel verschafft, um die noch übrigen Aufgaben auf verschiedene Arten lösen zu können. So behandelt er z. B. die Aufgabe, aus zwei Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel die übrigen Stücke zu bestimmen, nicht nur, indem er sich mit dem Cosinussatze die dritte Seite und dann mit den Gleichungen 4) die Winkel verschafft und außerdem zeigt, wie man den Cosinussatz durch Einführung eines Hilfswinkels in logarithmierbare Form überführen kann, sondern auch, indem er zuerst die beiden Winkel mittelst der Neperschen Analogieen sucht und dann die dritte Seite mit dem Sinussatze berechnet. In einem Zusatze zu dieser Aufgabe gestaltet er auch den Cosinussatz in die neue Form um: $\cos a = \frac{1}{4}\cos(A-b+c) + \frac{1}{4}\cos(A+b-c) - \frac{1}{4}\cos(A-b-c) - \frac{1}{4}\cos(A+b+c) + \frac{1}{2}\cos(b-c) + \frac{1}{2}\cos(b+c)$, der er bei Behandlung der polaren Aufgabe auch die polarreziproke Formel an die Seite stellt.

Dagegen ist zu bemerken, daß er das Polardreieck selbst nirgends benützt oder auch nur erwähnt, und daß er die Doppeldeutigkeit der beiden letzten Aufgaben, aus zwei Seiten und dem Gegenwinkel der einen oder aus zwei Winkeln und der Gegenseite des einen die übrigen Stücke zu bestimmen, mit Stillschweigen übergeht. Als letzte Aufgabe wird der Flächeninhalt eines beliebigen sphärischen Dreiecks, ähnlich wie der des rechtwinkligen abgeleitet.

Euler hatte in der besprochenen Abhandlung als Ausgangspunkt die Infinitesimalrechnung gewählt, um auch gleich die Behandlung der sphäroidischen Trigonometrie daran anknüpfen zu können. Da er aber die Notwendigkeit erkannte, auch eine elementare Grundlage seiner Formeln zu schaffen, so veröffentlichte er 1779 noch einen zweiten Aufsatz mit dem Titel „Trigonometria sphaerica universa, ex

primis principiis breviter et dilucide derivata"[1]), in welchem er die Fundamentalformeln auf geometrischem Wege aus dem zum sphärischen Dreieck gehörigen Dreikant mit der Spitze im Kugelmittelpunkt ableitete, wie es einst Coppernicus getan hatte.

O sei der Mittelpunkt einer Kugel mit dem Halbmesser 1, auf welcher das Dreieck ABC liegt; in den Ebenen COa (a liegt auf OA, b auf OB) und COb (Fig. 22) seien Ca und $Cb \perp OC$ errichtet, ferner sei $bp \perp Ca$, $pq \perp Oa$, dann ist $\sphericalangle\, bqp$ der Neigungswinkel von $\sphericalangle\, \widehat{Oa}$, ferner ist $\sphericalangle\, COa =$ Seite b, $\sphericalangle\, COb =$ Seite a und $\sphericalangle\, aOb =$ Seite c des sphärischen Dreiecks. Aus der Figur folgt dann unmittelbar: $Ca = \operatorname{tg} b$, $Oa = \sec b$, $Cb = \operatorname{tg} a$, $Ob = \sec a$. Hieraus folgt $bq = Ob \sin c = \frac{\sin c}{\cos a}$ und $Oq = Ob \cos c$ $= \frac{\cos c}{\cos a}$. Da ferner $\sphericalangle\, aCb = \sphericalangle\, C$ des Dreiecks ABC ist, so hat man $bp = Cb \cdot \sin C = \operatorname{tg} a \sin C$ und $Cp = Cb \cdot \cos C = \operatorname{tg} a \cos C$; und da $\sphericalangle\, CaO = 90^0 - b$ ist, so folgt noch: $ap = Ca - Cp = \operatorname{tg} b - \operatorname{tg} a \cos C$, $pq = ap \cdot \cos b = \sin b - \operatorname{tg} a \cos b \cos C$ und $aq = ap \cdot \sin b = \frac{\sin^2 b}{\cos b} - \operatorname{tg} a \sin b \cos C$. Nun ist aber $Oa = Oq + qa = \frac{1}{\cos b}$ $= \frac{\cos c}{\cos a} + \frac{\sin^2 b}{\cos b} - \operatorname{tg} a \sin b \cos C$ oder $\frac{\cos c}{\cos a} = \cos b + \operatorname{tg} a \sin b \cos C$ und endlich: $\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$.

Fig. 22.

Ähnlich liest man aus der Figur unmittelbar die Gleichung des Sinussatzes $\frac{\sin C}{\sin c} = \frac{\sin A}{\sin a}$ und die Gleichung

$\frac{pq}{bq} = \cos A = \frac{\cos a \sin b - \sin a \cos b \cos C}{\sin c}$ ab. „Diese drei Gleichungen umfassen die ganze sphärische Trigonometrie." Bevor wir Euler weiter folgen, wollen wir hier noch einmal ausdrücklich hervorheben, was wir schon früher (S. 103—104) erwähnten, daß hier die trigonometrischen Funktionen nicht nur als Linien, sondern auch als Verhältnisse aufgefaßt wurden, wie der vorliegende Beweis unzweideutig zu erkennen gibt; dagegen ist die allgemeine Gültigkeit der 3 Fundamentalformeln für beliebige sphärische Dreiecke durch Eulers Ableitung keineswegs bewiesen. Die dritte Formel, die sich hier ergab, $\cos A \sin c = \cos a \sin b - \sin a \cos b \cos C$, war in dieser Gestalt neu und wird im folgenden auf die schon im ersten Aufsatze ge-

1) Acta Acad. Petr. 1779, I, 72—86, 1782 erschienen. Allerdings hatte schon 1770 Simon Klügel in seiner „Analytischen Trigonometrie", wie wir später sehen werden, dasselbe getan, war aber von etwas anderen Überlegungen ausgegangen.

wonnene Form reduziert. Ferner wird aus ihr die Formel $\cos A \sin C = \cos a \sin B - \cos b \sin A \cos C$ abgeleitet, indem man ihre drei Glieder der Reihe nach mit den nach dem Sinussatze gleichen Quotienten $\frac{\sin C}{\sin c}, \frac{\sin B}{\sin b}, \frac{\sin A}{\sin a}$ multipliziert, und diese so erhaltene Relation gibt dann durch Vertauschung von B mit C und b mit c die polarreziproke Formel der ersteren: $\cos a \sin C = \cos A \sin B + \sin A \cos B \cos c$. Auch zeigt Euler, wie man aus jener dritten Formel den Cosinussatz für die Winkel: $\cos C = -\cos B \cos A + \sin B \sin A \cos c$ ableiten kann.[1])

Indem er dann des weitern in einem eigenen „Theorema“ die Existenz und Eigenschaften des Supplementardreiecks[2]), welches von den Polen der Ecken des gegebenen gebildet werde, hervorhebt, erklärt er die beiden Cosinussätze und die beiden Cotangentenformeln für die einzigen notwendigen Relationen, von denen man jedoch nur zwei zu merken habe, da die beiden anderen mittelst der Eigenschaften des erwähnten Dreiecks sich jederzeit sofort aus ihnen ableiten lassen. Zu bemerken ist ferner, daß in dieser Abhandlung die 6 möglichen Formen der Cotangentenformel erkannt sind.

Die fernern Paragraphen des Aufsatzes enthalten die Vervollständigung der Formelsysteme, indem die 6 Formeln des rechtwinkligen sphärischen Dreiecks als spezielle Fälle ($\sphericalangle C = 90^0$), die Halbwinkelsätze und die 4 Neperschen Analogieen, und zwar diese auf anderem Wege als im ersten Aufsatze, abgeleitet werden. Auch fügt er letzteren die schon von Neper mittelst stereographischer Projektion bewiesene Gleichung bei und schließt mit den Worten: „Die vorliegende Abhandlung kann somit als ein vollständiges System der sphärischen Trigonometrie betrachtet werden.“ Wir haben dem nur noch beizufügen, daß es die erste systematische Abhandlung ist, in welcher auf elementarem rein algebraischem Wege aus den drei aus einer Figur gewonnenen Fundamentalsätzen fast der ganze Formelapparat, dessen wir uns noch heute bedienen, abgeleitet wurde.

Euler hat von seinen trigonometrischen Formeln den vielseitigsten Gebrauch gemacht in geometrischen, astronomischen, mechanischen und physikalischen Problemen; ein näheres Eingehen auf diese Anwendungen würde aber den Rahmen unseres Werkes überschreiten, und wir begnügen uns daher damit, noch zum Schlusse einige Worte über die Inhaltsberechnungen stereometrischer und sphärischer Figuren beizufügen, die er wiederholt behandelte. So hat er in einem Auf-

1) Nebenbei mag hier noch bemerkt werden, daß die Schreibweise von Eulers Formeln zeigt, daß er an eine zyklische Vertauschung nicht dachte! — 2) Einen eigenen Namen für dasselbe hat Euler nicht eingeführt.

satze[1]) von 1752—53 das **Tetraedervolumen** durch die elegante Formel ausgedrückt:

$$V = \tfrac{1}{3}\, abd \sqrt{\sin\frac{p+q+r}{2}\sin\frac{p+q-r}{2}\sin\frac{p+r-q}{2}\sin\frac{q+r-p}{2}},$$

wo a, b, d die drei von einer Ecke ausgehenden Kantenlängen, p, q, r die von ihnen eingeschlossenen Winkel bezeichnen, und in zwei andern Abhandlungen[2]) verbreitet er sich über die Inhaltsberechnungen sphärischer Figuren, von denen wir die Bestimmung des Exzesses S und damit der Fläche eines sphärischen Dreiecks aus den drei Seiten hervorheben. Er erhält dafür unter andern die Formel:

$$\operatorname{tg}\frac{S}{2} = \frac{\sqrt{1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a\cos b\cos c}}{1+\cos a+\cos b+\cos c},$$

wo a, b, c die Seiten des Dreiecks sind, und für ein bei C rechtwinkliges Dreieck: $\operatorname{tg}\frac{S}{2} = \operatorname{tg}\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{b}{2}$, und diesen Gleichungen fügt er in dem zweiten Aufsatze noch die Formel

$$\cos\frac{S}{2} = \frac{1+\cos a+\cos b+\cos c}{4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}} \text{ bei.}$$

Wir haben **Eulers** Verdienste um die Trigonometrie und die verwandten Gebiete möglichst im Zusammenhange darzustellen versucht und nur, wo es unumgänglich notwendig war, auf die Arbeiten anderer Gelehrter hingewiesen, um die enorme Bedeutung seiner Tätigkeit in unserer Wissenschaft in das rechte Licht zu stellen. Es bleibt uns also noch übrig, einerseits die selbständigen Leistungen seiner Zeitgenossen zu besprechen, andererseits zu schildern, inwieweit **Eulers** Schöpfungen befruchtend und fördernd auf die Tätigkeit jener einwirkten.

---

1) Demonstratio nonnullarum insignium proprietatum, quibus solida hedris planis inclusa sunt praedita. Novi Comm. IV, 1752—53, 140 ff. Einen Ausdruck für das Tetraedervolumen in den sechs Kanten hat schon **Joachim Jungius** 1610 gegeben. Vgl. eine Notiz von **Kummer** in **Guhrauers** Monographie „**J. Jungius** und sein Zeitalter", Stuttgart und Tübingen 1850, 297. — 2) De mensura angulorum solidorum Acta Acad. Petr. 1778, II 31 ff., publiziert 1781, und Variae speculationes super area triangulorum sphaericorum. Nova Acta Acad. Petr. X, 47 ff., letztere Abhandlung erst nach seinem Tode 1792 veröffentlicht. Die Formeln für V und für $\operatorname{tg}\frac{S}{2}$ haben **De Gua** 1783 und **Lagrange** 1773 und 1798/99 wieder entwickelt, ohne **Euler** anzuführen. **Eulers** Abhandlungen, welche Anwendungen der Trigonometrie enthalten, stehen bei **Hagen** Index Operum L. E. 17—19 angeführt.

5. Kapitel.

Eulers Zeitgenossen und Nachfolger im 18. Jahrhundert.

§ 1. Beiträge zum Ausbau der Trigonometrie.

Im 3. Kapitel haben wir die Entwicklung der elementaren Trigonometrie bis ungefähr zur Mitte des 18. Jahrhunderts verfolgt, da ihre definitive Umgestaltung nach der analytischen Seite hin erst 1753 durch den ersten grundlegenden Aufsatz Eulers angebahnt wurde, obwohl derselbe, wie wir sahen, seine Bezeichnungsweise der Funktionen schon viel früher in seinen zahlreichen Abhandlungen, sowie in der „Introductio“ angewendet hatte. Diese Bezeichnungsweise, von der so viel abhing, wurde auch von einigen der hervorragendsten Mathematiker, wie von den Franzosen Clairaut und D'Alembert[1]) alsbald mit Glück gebraucht, während andere und darunter namentlich die Engländer sich noch ziemlich lange teils der älteren Abkürzungen bedienten, teils überhaupt keine Formel schrieben. Was aber die Weiterbildung der trigonometrischen Methoden selbst durch Eulers Zeitgenossen anlangt, so wollen wir in diesem Paragraphen sammeln, was uns darüber bekannt geworden ist.

Der Engländer Francis Blake (1708—1780) veröffentlichte 1752 in den P. T. (XLVII) einen Aufsatz: „Spherical Trigonometry reduced to Plane“, in welchem er die Hauptfälle der Kugeltrigonometrie durch einfache Konstruktion auf die Berechnung ebener Dreiecke reduzierte. Dabei ging er von der Bestimmung eines Winkels aus den drei Seiten aus[2]), welcher Fall ihm den Schlüssel zur Lösung der übrigen bot. Im Grunde genommen ist sein Verfahren nur eine Vereinfachung der

1) In Mémoires de l'Acad. de Paris 1745. — 2) Um $\sphericalangle\, a$ im $\triangle\, abd$ (Fig. 23) zu bestimmen, seien af und ae die Tangenten der Bögen ab und ad und c das Zentrum der Kugel, dann ist $ce = \sec ab$, $cf = \sec ad$ und $\sphericalangle\, c = \text{arc}\, bd$ bekannt. Somit ergibt sich aus dem ebenen $\triangle\, cef$ die Seite ef und da $af = \text{tg}\, ab$, $ae = \text{tg}\, ad$ ebenfalls bekannt sind, so findet man aus dem ebenen $\triangle\, aef$ den $\sphericalangle\, eaf = \sphericalangle\, a$. Dieselbe Ableitung findet sich wieder 1810 bei Bessel, Briefwechsel zwischen Gauß und Bessel, Leipzig 1880, 134—135 und 1842 bei Strehlke, Archiv der Mathematik und Physik II, 111, der Blakes Ableitung jedenfalls nicht kannte. Mit dieser Figur wurde auch der Cosinussatz später wiederholt abgeleitet, so von Lagrange, Journ. de l'École Polytechnique 1799, und im Anschlusse an letzteren von vielen andern im 19. Jahrhundert.

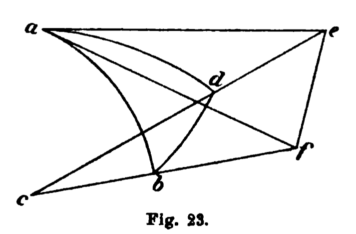


Fig. 23.

schon von den Arabern und Regiomontan ausgebildeten Methode (vgl. Tl. I, p. 68 und 129).

Ein anderer Engländer, Patrik Murdoch († 1774), bemühte sich, die zu trigonometrischen Berechnungen nötigen Hilfsmittel möglichst zu reduzieren, indem er in seiner „Trigonometry abridged“[1]) zeigte, wie man mit drei Theoremen in allen Fällen auskommen könne. Das erste ist der Sinussatz für das schiefwinklige sphärische Dreieck, das zweite die Gleichung $\sin a \sin b \sin^2\frac{C}{2} + \sin^2\frac{a+b}{2} - \sin^2\frac{c}{2} = 0$[2]), d. h. der Halbwinkelsatz, und das dritte die Relation

$$\frac{1 - \sin A \sin B \cos^2\frac{a-b}{2} - \sin^2\frac{A-B}{2}}{1 - \sin a \sin b \sin A \sin B} = \sin^2\frac{C}{2};$$

besondere Eleganz wird man in diesen Formeln wohl nicht finden!

Eine neue Begründung einiger trigonometrischer Sätze versuchte Jean François de Castillon[3]) (1709—1791), indem er zeigte, wie sich aus dem längst bekannten und von ihm geometrisch abgeleiteten Satze $[(a+b)^2 - c^2] : [c^2 - (a-b)^2] = \operatorname{ctg}\frac{C}{2} : \operatorname{tg}\frac{C}{2}$ unmittelbar sieben Theoreme in Newtons Arithmetica universalis ableiten lassen, von denen wir einige S. 87 anführten.

Ferner suchte der Franzose Alexandre-Gui Pingré (1711—1796)[4]) dadurch eine Zusammenfassung der wichtigsten sphärischen Sätze zu erzielen, daß er die Npersche Regel auf schiefwinklige Dreiecke ausdehnte, d. h. er vereinigte die längst bekannten Sätze, die sich durch Fällen eines senkrechten Bogens von einer Ecke des Dreiecks auf die Gegenseite ergaben, in die beiden Regeln: „In jedem sphärischen Dreieck sind die Sinus analoger Segmente proportional zu den Tangenten anliegender Stücke und die Cosinus analoger Segmente proportional zu den Sinus gegenüberliegender Stücke.“[5]) Unter analogen Segmenten sind hierbei die zwei Stücke eines durch eine Höhe geteilten Winkels oder einer geteilten Seite verstanden, und statt der nicht geteilten Seiten und der Winkel sind ihre Komplemente zu nehmen. Diese zwei Regeln verbunden mit den beiden Neper'schen lösen dann alle Fälle mit Ausnahme derjenigen, in welchen drei Seiten

1) P. T. 1758, L, 2; 538—543. — 2) Diese Gleichung lautet in seiner Schreibweise $Ssa^2 + d^2 - b^2 = 0$. — 3) Mém. de l'Acad. de Paris 1766 354, Auszug aus zwei 1764 und 1765 gelesenen Abhandlungen. — 4) Mém. de l'Acad. de Paris 1756 (erschienen 1762), 301. — 5) Z. B. ergeben diese beiden Regeln aus Fig. 24 die Gleichungen $\sin BD : \sin DC = \operatorname{ctg} B : \operatorname{ctg} C$ und $\cos BD : \cos DC = \cos c : \cos b$, oder $\cos A_1 : \cos A_2 = \operatorname{ctg} c : \operatorname{ctg} b$ und $\sin A_1 : \sin A_2 = \cos B : \cos C$.

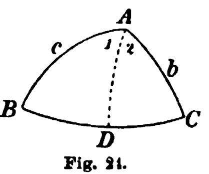


Fig. 24.

oder drei Winkel gegeben sind. Pingré bediente sich, nebenbei bemerkt, durchweg der Schreibweise Eulers.

Pingrés Regel, welche wenig Beachtung gefunden zu haben scheint, suchte Walter Fisher zu verbessern und auf die beiden nicht miteinbegriffenen Fälle auszudehnen[1]); zu diesem Zwecke bezeichnete er mit M das Mittelstück, mit A und a die beiden anliegenden und mit O und o die beiden gegenüberliegenden Stücke und mit l das entferntestliegende oder letzte Stück, dann lassen sich, wenn man statt der Winkel ihre Supplemente nimmt, alle Dreiecksfälle, ob das Dreieck rechtwinklig oder schiefwinklig ist, durch die folgenden vier Theoreme behandeln:

I. $\sin A : \sin a = \sin O : \sin o$

II. $\sin \frac{A-a}{2} : \sin \frac{A+a}{2} = \operatorname{tg} \frac{o-O}{2} : \operatorname{tg} \frac{M}{2}$ [2])

III. $\operatorname{tg} \frac{A-a}{2} : \operatorname{tg} \frac{A+a}{2} = \operatorname{tg} \frac{O-o}{2} : \operatorname{tg} \frac{O+o}{2}$

IV. $\sin A : \sin a : 1 = \sin \frac{A+a+l}{2} : \sin \frac{A+a-l}{2} : \sin^2 \frac{M}{2}$.

Um diese Theoreme leichter zu behalten, gab er noch eine etwas alberne mnemotechnische Regel an.

Entschieden verdienstvoller als die eben erwähnten Arbeiten ist eine Abhandlung, welche Gottfried Heinsius, Professor der Mathematik in Leipzig (1709—1769), in den Acta Erud. unter dem Titel „Dijudicatio casuum determinatorum et ambiguorum in Trigonometria praesertim sphaerica“ 1756 veröffentlichte und in welcher er zum erstenmal eine systematische Besprechung der doppeldeutigen Fälle auf Grund der trigonometrischen Formeln lieferte. Indem er zunächst zeigte, daß man sich auf Dreiecke beschränken darf, deren Winkel und Seiten im ersten oder zweiten Quadranten liegen, untersuchte er das bei r rechtwinklige sphärische Dreieck MNr (Fig. 25), dessen Winkel nach einer damals sehr häufigen Bezeichnungsweise[3]) M, N, r und dessen Seiten H, P, B benannt wurden. Da er sich aber merkwürdigerweise noch immer nicht (8 Jahre nach dem Erscheinen der Introductio!) klar über das Zeichen der Tangente eines Winkels im zweiten Quadranten

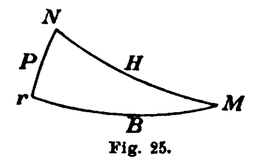


Fig. 25.

1) Transactions of the roy. Society of Edinbourgh. Vol. IV, 1798: „An easy and general method for solving all the cases of plane and spherical Trigonometry.“ — 2) Im Texte befinden sich hier zwei Druckfehler, indem es heißt $= \operatorname{tg} \frac{O-o}{2} : \operatorname{tg} \frac{O+o}{2}$. — 3) Vgl. z. B. J. Andr. Segner, Elementa Arithmeticae Geometriae et calculi Geometrici, Aufl. von 1756.

war[1]), die Zeichen der übrigen Funktionen aber richtig zu bestimmen wußte, so vermied er in seinen Formeln konsequent die Tangente, wodurch er tatsächlich unrichtige Resultate ausschloß. Auch im Falle des schiefwinkligen sphärischen Dreiecks gelang es ihm durch Benützung des Sinussatzes, der Cosinus- und der Cotangentenformel, sowie der Zerspaltung des Dreiecks in zwei rechtwinklige, die Diskussion der bestimmten und unbestimmten Fälle richtig und vollständig zu erledigen. Damit war die geometrische Unterscheidung der verschiedenen Gattungen von Kugeldreiecken, die den älteren Mathematikern, wie Rhäticus und Otho, so gewaltige Schwierigkeiten bereitet hatte, durch die Diskussion einiger analytischer Formeln ersetzt.

Eine ganz andere Richtung schlug D'Alembert (1717—1783)[2]) in einer Abhandlung ein, die er in den Miscellanea Taurinensia t. IV (1760—69) veröffentlichte. Er stellte sich nämlich die Aufgabe, die Grundlinien einer Trigonometrie der Kleinkreise auf der Kugelfläche zu ziehen, indem er die beiden Hauptaufgaben löste: den Neigungswinkel eines Klein- und eines Großkreises zu bestimmen, welche dieselbe Sehne haben, und die zwischen zwei solchen Kreisen liegende Fläche auszudrücken. Die weitere Ausführung seiner Angaben will er dann anderen überlassen, und in der Tat knüpfte auch bald Bossut an D'Alemberts Gedanken an, indem er in seinen „Traités de calcul différentiel et de calcul intégral" 1798 sowohl mit Integralrechnung den Inhalt eines von drei Kleinkreisen eingeschlossenen Dreiecks bestimmte, als auch einen wenn auch komplizierten Weg angab, wie man auf elementare Weise zur Auswertung einer solchen Fläche gelangen könne.

Die Trigonometrie auf neue Art weiterzufördern, stellte sich auch Johann Heinrich Lambert[3]) zur Aufgabe und sprach sich über

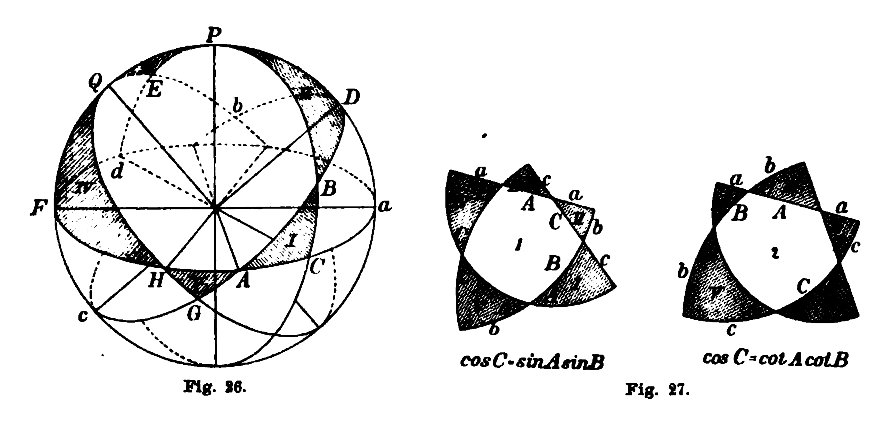
1) Der Grund hierfür lag darin, daß man bei der Vorzeichenbestimmung der Funktionen noch immer von der geometrischen Definition derselben als Linien am Kreise ausging. So auch der Abbé de la Caille, der erst in der Neuausgabe seiner Leçons élémentaires de mathématiques: Traité préliminaire de la Trigonométrie 1764 die Zeichen richtig bestimmte. Desgleichen verbesserte Segner in einer nachträglich geschriebenen Vorrede zu dem eben angeführten Werke seinen aus der geometrischen Darstellung fließenden Irrtum, daß $\mathrm{tg}\,(180^\circ - A) = +\,\mathrm{tg}\,A$ sei, indem er endlich aus den Gleichungen $\cos A : \sin A = r : \mathrm{tg}\,A$ und $\mathrm{tg}\,A : r = r : \mathrm{ctg}\,A$ das richtige Zeichen folgerte. — 2) Jean le Rond d'Alembert war Mitglied der Akademie der Wissenschaften zu Paris und Berlin, auch Mitglied und Sekretär der Académie française und bezog in spätern Jahren eine Pension von Friedrich dem Großen. — 3) Lambert war geboren zu Mülhausen 1728 und starb als Mitglied der Akademie und Oberbaurat in Berlin 1777. Seine durchweg bedeutenden Abhandlungen erstreckten sich namentlich auf das Gebiet der angewandten Mathematik, worin er Hervorragendes geleistet hat. Jedoch war er auch als Theoretiker nicht minder bedeutend.

die Art und Weise, wie dies geschehen könne, in seinen „Beiträgen zur Mathematik“ I, 1765 (369 ff.) eingehend aus. Er hatte dabei hauptsächlich drei Gesichtspunkte im Auge: einmal, sagte er, könne man die Auflösung der einzelnen Dreiecksfälle durch Berechnung passender Tafeln vereinfachen — ein Ziel, das sich, wie wir wissen, schon Regiomontan gesetzt hatte — dann könne durch Benützung der Algebra in trigonometrischen Aufgaben viel vereinfacht werden, indem dadurch „die Ausdrücke selbsten geschmeidiger gemacht, die Irrationalitäten in blosse Verhältnisse verwandelt werden“ u. s. w. und endlich könne man in der Verwendung der Trigonometrie zur Integralrechnung noch bedeutend weiter gehen. „Es ist leicht“, sagt er, „zu erachten, daß man auch hier auf neue Formeln in der Trigonometrie hat bedacht sein müssen, welche von den beiden ersten Arten um so viel mehr verschieden waren, da es hier auf Differentialgleichungen und ihre Integration ankömmt.“ Dann fährt er fort: „Man sieht leicht, daß, was man hierin noch thun kann, keine bloße Nachlese ist, sondern, daß besonders in den zwei letzten Absichten noch Hauptstücke zurückbleiben, die weder so leicht, noch so bald werden ins reine gebracht werden.“ Dazu muß bemerkt werden, daß diese Worte Lamberts 12 Jahre nach dem ersten und 14 Jahre vor dem zweiten Aufsatze Eulers geschrieben sind; und erst in dieser zweiten Abhandlung hat Euler die analytisch-trigonometrische Rechnung zu ihrer vollen Eleganz ausgebildet.

Wir wollen nun sehen, was Lambert zur Vervollkommnung der Trigonometrie beigetragen hat. Zunächst wandte er sich der Neperschen Regel zu, indem er ganz richtig bemerkte, daß dieselbe bisher nur durch einen Induktionsschluß bewiesen worden sei, der folgendermaßen lautete: „Man weiß alle möglichen Fälle: Man theilt sie in zwo Classen. Von jedem, der zu einer dieser Classen gehört, erweiset man eine gleiche Regel: Und man schließt mit Recht: Was von jedem insbesondere gilt, das gilt von allen, und folglich von der ganzen Classe“ (a. a. O. 375).

Da dieser Schluß nicht das eigentliche Wesen dieser merkwürdigen Regel aufdeckt, so sucht er nach einem andern Beweis, der, wie uns scheint, auf demselben Gedankengange beruht, den auch Neper angewendet, aber nur angedeutet hatte (siehe S. 12—13). Indem Lambert nämlich Wolf folgend, die Katheten des rechtwinkligen sphärischen Dreiecks durch ihre Komplemente ersetzt, zeigt er, daß die fünf zirkulären Stücke in fünf Dreiecken liegen, die sich in einem Zyklus um die Kugel aneinander schließen, und veranschaulicht dies, indem er die Sphäre stereographisch auf die Ebene projiziert. Um jedoch die durch jene Dreiecke gebildete fünfeckige Figur, welche auch schon Neper

schematisch gezeichnet hatte, ganz anschaulich erkennen zu lassen, haben wir vorgezogen, sie in Fig. 26 durch schiefe Projektion darzustellen. $AadF$ und $ADcG$ sind zwei größte Kreise, P und Q ihre Pole, durch die der Kreis $cQPa$ geht. Ferner sei dPC irgend ein anderer Kreis, durch den Pol P, welcher in C mit dem ersten Kreis einen rechten Winkel macht, wodurch $\triangle ABC$ entsteht. Zieht man endlich noch Kreis $GHQb$ durch Q auf Dc senkrecht, so werden durch diese Kreise die fünf schraffierten Dreiecke erzeugt, von denen Lambert aus ihrer Entstehung nachweist, daß sie die verlangte Eigenschaft haben, dieselben fünf zirkulären Stücke zu besitzen. So geht z. B. der Winkel A des ersten Dreiecks, im zweiten (BDP) in das Komplement der Kathete $90^0 - PD$ ($= aD = A$), im dritten (PQE) in die Hypotenuse PQ, im vierten (QFH) in das Komplement $90^0 - FQ$ und im fünften (HGA) wieder in den Scheitel-Winkel A ($= cF$) über, und



$\cos C = \sin A \sin B$ $\cos C = \cot A \cot B$

Fig. 26. Fig. 27.

allgemein behalten ein Mittelstück und zwei anliegende Stücke, sowie ein Mittelstück und zwei gegenüberliegende diesen Charakter in allen fünf Dreiecken bei. Zeichnet man daher die beiden (stereographischen) Figuren Fig. 27, in denen die kleinen Buchstaben die Komplemente der Katheten bedeuten, so liefern die beiden darunterstehenden Gleichungen, für ein Dreieck bewiesen, die sämtlichen 10 Fälle der Neperschen Regel.[1])

Man wird aus dem Vorhergehenden erkannt haben, daß Lambert wirklich den wahren Grund der Neperschen Regel aufdeckte, indem er bei Aufstellung seines Beweises unbewußt mit dem Begriff der Gruppe operierte, und in der Tat hat in neuester Zeit Otto Pund[2])

1) Vgl. auch Prestel im Archiv für Mathem. XI, 1848, 56, der Lambert nicht kennt. — 2) Über Substitutionsgruppen in der sphärischen Trigonometrie, insbesondere die Neperschen Regeln für die rechtwinkligen sphärischen

in Altona-Ottensen, ohne Lamberts Arbeit zu kennen, die Regel vom Standpunkte der Gruppentheorie aus ganz ähnlich abgeleitet.

An die Behandlung der Neperschen Regel schließt Lambert eine Sammlung der wichtigsten goniometrischen Formeln an, die er genau so schreibt, wie Euler in der Introductio, und wendet sich dann zum schiefwinkligen sphärischen Dreieck. Zur Untersuchung desselben unterscheidet er vier Fälle: Unter den vier jedesmal in Frage kommenden Stücken sind 1) eine Seite und alle drei Winkel, 2) alle drei Seiten und ein Winkel, 3) zwei Seiten und zwei Winkel und diese entweder den Seiten gegenüberliegend oder 4) so liegend, daß einer zwischen die Seiten fällt. Von diesen haben noch der erste und zweite Fall vermöge des Supplementardreiecks dieselbe Auflösung, während die beiden andern gesondert betrachtet werden müssen. Die Vorschriften zur Lösung der Einzelfälle gewinnt Lambert aus der Zerspaltung des Dreiecks mittelst einer Höhe und Anwendung der Neperschen Regel, sowie jener sechs Formeln für das schiefwinklige Dreieck, die sich aus ihr unmittelbar ergeben. Da er aber die notwendigen Gleichungen zu einer Schlußformel zusammenzusetzen bestrebt ist, so erhält er hierdurch natürlich die bekannten Relationen für das schiefwinklige Dreieck. Z. B.: Verhältnis zwischen drei Seiten und einem Winkel. Die drei Seiten werden mit den Buchstaben des großen, die drei Winkel mit denen des kleinen lateinischen Alphabetes bezeichnet, dann ist (Fig. 28) $\cos A : \cos C = \cos(B - x) : \cos x$ und hieraus $\cos A = \cos C \cos B + \sin B \cos C \operatorname{tg} x$; nach der Neperschen Regel aber ist $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} C \cdot \cos a$, also $\cos A = \cos C \cos B + \sin B \sin C \cos a$, d. i. die Formel des Cosinussatzes.

Fig. 28.

Ähnlich gibt der zweite Fall in Lamberts Einteilung den Cosinussatz für die Winkel, der dritte Fall die Cotangentenformel und der vierte Fall den Sinussatz. Für bequemere logarithmische Rechnung wird übrigens auch noch der Halbwinkelsatz und sein polarer abgeleitet und $\sin A = 2 \sin \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{A}{2}$ durch die Winkel, sowie $\sin a$ durch die Seiten ausgedrückt (a. a. O., S. 405—406).

Endlich gibt er noch eine logarithmische Umformung des Cosinussatzes an (415—417), indem er in der obigen Formel $\cos a = 1 - 2\sin^2 \frac{a}{2}$

Dreiecke. Mitteilungen der Math. Gesellschaft in Hamburg III, 7 1897; siehe auch E. O. Lovett im Bulletin of the American Math. Society, 2. Series, IV, 1898, 252.

setzt und hierdurch zunächst $\frac{\cos A}{2 \sin B \sin C} = \frac{\cos (B - C)}{2 \sin B \sin C} - \sin^2 \frac{a}{2}$ findet. Ist dann $\frac{\cos (B - C)}{2 \sin B \sin C} = \sin^2 \frac{\varphi}{2}$, so kommt schließlich

$$\cos A = 2 \sin B \sin C \sin \frac{\varphi + a}{2} \sin \frac{\varphi - a}{2}.$$ [1]

Auch die Cotangentenformel wird in ähnlicher Weise umgestaltet. Wir sehen hieraus, daß Lambert es vorzüglich verstand, die trigonometrischen Rechnungen zu fördern, lange bevor Euler seinen zweiten Hauptaufsatz veröffentlicht hatte.

In seinen „Zusätzen zu den logarithmischen und trigonometrischen Tabellen", die 1770 in Berlin erschienen, stellt er in Tafel XXI die „brauchbarsten Sätze und die sämtlichen Fälle der geradlinichten und sphärischen Trigonometrie" zusammen. Dabei werden die rechtwinkligen Dreiecke wie in Fig. 29 bezeichnet, während für die schiefwinkligen die bereits in den Beiträgen benützte Bezeichnung beibehalten wird. Die Formeln der sphärischen Trigonometrie geben zu keiner weiteren Bemerkung mehr Anlaß, dagegen muß gebührend hervorgehoben werden, daß seine Schreibweise der Formeln des rechtwinkligen ebenen Dreiecks, wie z. B. $k = h \sin a = h \cos b$, $c = h \cos a = h \sin b$ u. s. w. nicht nur die Vermeidung des Sinus totus, sondern geradezu die Darstellung der Funktionen als Verhältnisse erkennen läßt. Ausdrücklich hervorgehoben hat dies allerdings auch der scharfsinnige Lambert ebensowenig wie Euler.

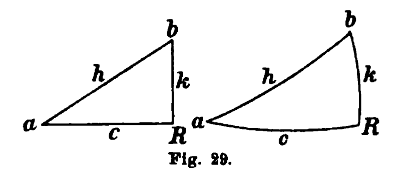


Fig. 29.

Endlich gehört hierher noch die Erwähnung einer Formel zur Berechnung rechtwinkliger ebener Dreiecke, die Lambert in denselben Zusätzen (p. 151), sowie in seinen Beiträgen, II, 312 ohne Ableitung mitgeteilt hat. Dieselbe lautet $\varphi = \frac{28 \sin \varphi + \sin 2\varphi}{18 + 12 \cos \varphi}$ und ist etwas genauer als jene, welche wir bei Snellius (Tl. I, 243) kennen lernten. Einen Beweis für sie hat erst Mollweide 1807 in Zachs Monatl. Korrespondenz XVI, 24—25 gegeben.

Noch von einer andern Seite her suchte Lambert die Trigonometrie zu bereichern, indem er nämlich die Hyperbelfunktionen für sie zu verwerten begann. Schon Gregorius a St. Vincentio[2]),

1) Eine etwas andere Umgestaltung hat auch ein gewisser W. Croswell durch eine Regel ausgedrückt gegeben. Memoirs of the American Academy of Arts and Sciences II, 1780, veröffentlicht 1793. — 2) Wir schließen uns im Folgenden an die vorzügliche Darstellung an, die S. Günther im I. Kapitel seiner „Lehre von den Hyperbelfunktionen" Halle 1880 gegeben hat.

David Gregory und Craig hatten durch die Quadratur der gleichseitigen Hyperbel, wenn auch unbewußt, die Grundlagen für diese Funktionen geschaffen, bei Newton traten dann bereits Vergleiche zwischen Kreis und gleichseitiger Hyperbel auf, und De Moivre hatte schon ziemlich deutlich erkannt, daß durch Vertauschung des Reellen mit dem Imaginären Kreisaufgaben in solche für die gleichseitige Hyperbel übergehen. Der erste aber, welcher eine Theorie der Hyperbelfunktionen begründete, war der von Lambert selbst angeführte Graf Vincenzo Riccati (1707—1775), welcher die Hauptgleichungen für dieselben durch geometrische Betrachtungen entwickelte. Für uns ist diese Theorie nur insoweit von Interesse, als sie zur Behandlung trigonometrischer Probleme in Verwendung kam, was zuerst von Lambert angebahnt wurde.[1])

Es sei CDQ ein Kreisquadrant, der den Ast Qq einer gleichseitigen Hyperbel in Q berührt (Fig. 30), q ein beliebiger Punkt der Hyperbel, $qP \parallel QC$, PQ und $qp \perp QC$, $\sphericalangle PCQ = \omega$, der sogenannte „transzendente" und $\sphericalangle qCQ = \varphi$ der „gewöhnliche" Winkel, dann ist, wie die Figur zeigt, (1) $\operatorname{tg}\varphi = \sin\omega$, $CP = \sec\omega = Cp = \sin h\varphi$ und $PQ = \operatorname{tg}\omega = pq = \cos h\varphi$. Bezeichnet man den zu $\sphericalangle\varphi$ gehörigen Hyperbelsektor QCq mit u, so ist $du = \frac{d(\operatorname{tg}\varphi)}{1-\operatorname{tg}^2\varphi}$, woraus folgt $2u = $ $= \log\frac{1+\operatorname{tg}\varphi}{1-\operatorname{tg}\varphi} = \log\frac{1+\sin\omega}{1-\sin\omega}$, oder endlich (2) $u = \log\operatorname{tg}\left(45^0 + \frac{\omega}{2}\right)$.

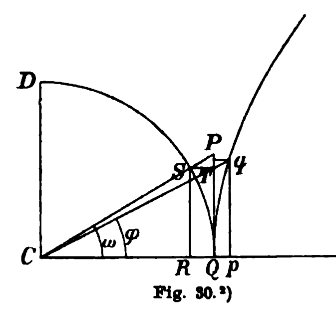


Fig. 30.[2])

Somit kann man zu jedem Winkel φ den entsprechenden Hyperbelsektor berechnen, indem man sich der beiden Gleichungen (1) und (2) bedient. Damit konstruiert nun Lambert eine kleine Tabelle, welche in der ersten Spalte links die Werte des Winkels ω von 0^0 bis 90^0 enthält und zu ihnen die entsprechenden Hyperbelsektoren, den sinhyp., den cosinhyp., die Logarithmen derselben, die tg. und log tg. des zugehörigen gewöhnlichen Winkels und endlich in der letzten Spalte diesen selbst gibt. Wie er dieselbe zur Vereinfachung trigonometrischer Rechnungen anwendet, wollen wir an dem ersten der von ihm mitgeteilten Beispiele beleuchten. Es soll für ein sphärisches Dreieck aus dem Winkel c und der Seite B eine Tafel berechnet werden, die zu jedem Winkel c den zugehörigen Winkel a gibt. Dazu

1) Observations trigonométriques. Histoire de l'Académie de Berlin 1768, 24, 327. Hier betrachtet er auch die Funktionen $\sin(ix)$ und $\cos(ix)$ näher, die Euler schon durch die Exponentialfunktion definiert hatte (S. 107). — 2) P und q sollen auf einer Parallelen zu CQ liegen!

hat man $\sin B \operatorname{ctg} A = \cos c \cos B + \sin c \operatorname{ctg} a$, und hieraus $\frac{\operatorname{ctg} a}{\cos B} = \operatorname{tg} k \sec c' - \operatorname{tg} c'$, wenn $\operatorname{tg} k = \operatorname{tg} B \operatorname{ctg} A$ und $c' = 90^0 - c$ ist. Sind nun die den Winkeln k und c' entsprechenden Hyperbelsektoren $\varkappa$ und γ, so hat man $\operatorname{ctg} a = \cos B (\operatorname{tg} \varkappa \cos \gamma - \sin \gamma) = \frac{\cos B}{\cos \varkappa} \sin (\varkappa - \gamma)$, oder um die Funktionen nach ihren Gattungen zu unterscheiden: $\operatorname{ctg} a = \frac{\cos B}{\cos h \varkappa} \sin h (\varkappa - \gamma)$, wodurch die Rechnung auf eine einzige Analogie gebracht ist, und zwar auf die einfache Addition des konstanten Logarithmus von $\cos B : \cos h \varkappa$ zu dem Logarithmus von $\sin h (\varkappa - \gamma)$. Zum Zwecke solcher Rechnungsvereinfachungen suchte also Lambert die neuen Funktionen in der Trigonometrie zu verwerten.

Wir haben schon hervorgehoben, daß Lambert wie Euler die trigonometrischen Funktionen als Verhältnisse anschrieb, ohne sie jedoch als solche ausdrücklich zu definieren. Der erste, welcher dies tat, scheint Simon Klügel (1739—1812)[1]), ein Schüler Kästners, gewesen zu sein. Dieser veröffentlichte im Jahre 1770 eine „Analytische Trigonometrie", welche hoch über den andern in Deutschland erschienenen Lehrbüchern jener Zeit steht. Darin heißt es (S. 3): „Die geraden Linien, deren Verhältnisse jeden Winkel zu bestimmen dienen, sind am einfachsten die Seiten eines rechtwinklichten Dreiecks"; und weiter: in dem bei B rechtwinkligen Dreieck ABC heißt „das Verhältnis $BC : AC$ oder der Quotient $\frac{BC}{AC}$ der Sinus des Winkels A, der BC gegenüber liegt" u. s. w. und endlich (S. 4): „Ich will diese Verhältnisse mit einem allgemeinen Namen: trigonometrische Funktionen der Winkel nennen, als deren Stelle sie in der Rechnung vertreten." Diese letztere, jetzt allgemein übliche Bezeichnung erscheint ebenfalls hier zum erstenmal.

Mit der obigen Definition sind dann auch die immer noch ab und zu auftretenden Zweifel über das Vorzeichen der Tangenten und Cotangenten von Winkeln, die einen rechten übersteigen, endgültig gelöst, indem „auch die Analysis lehrt, daß der Übergang von dem bejahten zum verneinten auf zweyerley Arten geschehen kann, erstlich, wenn durch die beständige Verminderung eine Größe Nichts und folgends verneint wird, oder zweitens, wenn sie, nachdem sie ohne Ende gewachsen ist, wieder abnimmt". Im übrigen schließt sich Klügels Schrift in der Bezeichnung ganz an Euler an und entwickelt in dieser die Hauptsätze der ebenen und sphärischen Trigono-

1) Georg Simon Klügel war erst Professor der Mathematik an der Universität Helmstädt, dann in Halle.

metrie von wenigen geometrisch gewonnenen Sätzen ausgehend durch analytische Rechnung. So stellt er in der ebenen Trigonometrie den Sinussatz, den Cosinussatz, die Formel $\operatorname{tang} B = \frac{b \sin A}{c - \cos A}$ und die Winkelbeziehung $\sin C = \sin A \cos B + \cos A \sin B$ in den Vordergrund[1]) und entwickelt aus der letzteren unmittelbar das Additionstheorem; dabei erkennt er sehr wohl, daß dieses „alle Lehrsätze über die Zusammensetzung der Winkel" enthält, und folgert sie daher in ihrer Gesamtheit aus ihm.

Die Goniometrie — auch dieser Name, der von Lagny für die Winkelmessung eingeführt wurde, ward erst von Klügel in dem heute gebräuchlichen Sinne in seinem „Mathematischen Wörterbuch" II, 504 gebraucht — vervollständigte er dadurch, daß er die auf die Trigonometrie bezüglichen Reihen aus der Introductio Eulers hereinnahm, ihre Ableitungen aber teils selbständig gestaltete, teils vervollständigte. Dann wandte er sich zur sphärischen Trigonometrie. Beachtet man, daß Eulers zweiter Aufsatz erst neun Jahre nach Klügels Schrift erschien, so muß man seiner Entwicklung des vollständigen Formelsystems derselben alle Anerkennung zollen. Nachdem er hierbei vom Dreikant ausgehend die Sätze für das rechtwinklige Dreieck gewonnen und dieselben zum erstenmal auf Dreiecke, deren Winkel $> 90^0$ sind, ausgedehnt hatte, leitete er aus diesen die drei Hauptgleichungen des schiefwinkligen Dreiecks ab und vervollständigte sie durch den Halbwinkelsatz und die Neperschen Analogieen, während er gleichzeitig nachwies, wie man mit Hilfe des Supplementardreiecks zu jeder Formel eine Polarformel angeben kann. Von den Anwendungen, die seinem Buche beigegeben waren, wollen wir nicht weiter sprechen.

Klügels Buch hat jedenfalls sehr viel zur rascheren Einführung von Eulers analytischer Behandlungsweise in unsere Wissenschaft beigetragen; und wenn diese Methode auch in den Lehrbüchern nur sehr langsam die ältere verdrängte, so bedienten sich ihrer doch die Gelehrten vom Beginn der siebziger Jahre an fast ausschließlich. Davon zeugen die wissenschaftlichen Abhandlungen, die in den Akademieschriften aller Kulturnationen erschienen, fast auf jeder Seite.

---

1) Übrigens hat Klügel auch die übrigen trigonometrischen Sätze. So entwickelt er den Tangentensatz aus dem Sinussatze und führt ähnlich, wie schon Th. Streete (s. S. 44) getan hatte, zu seiner Benützung einen Hilfswinkel ein, indem er in $(c + b) : (c - b) = \operatorname{tg} \frac{C + B}{2} : \operatorname{tg} \frac{C - B}{2}$, $\frac{b}{c} = \cos 2\alpha$ setzt; das gibt dann $\operatorname{tg} \frac{C - B}{2} = \operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{tg} \frac{C + B}{2}$.

Mit besonderem Geschick handhabte sie Eulers Schüler Lexell (1740—1784), Professor der Mathematik und Akademiker in Petersburg, der außer seinen Abhandlungen über Polygonometrie, auf die wir noch zu sprechen kommen, in mehreren Aufsätzen, die in den Schriften der Petersburger Akademie niedergelegt sind, schwierige Probleme der sphärischen Trigonometrie mit großer Leichtigkeit und Eleganz behandelte. So wies er nach, daß die Spitzen aller sphärischen Dreiecke von gleicher Fläche, die über derselben Grundlinie stehen, auf einem Kleinkreise liegen[1]) und daß die Produkte des Sinus jeder Seite in den Sinus der zugehörigen Höhe, sowie die Produkte des Sinus jedes Winkels in den Sinus der entsprechenden Höhe konstant sind[2]), und zwar ist die erstere Konstante

$$d = 2\sqrt{\sin s \sin (s-a) \sin (s-b) \sin (s-c)},$$

wo nach Lexells Bezeichnung $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ bedeutet, und die zweite Konstante $\delta = 2\sqrt{-\cos S \cos (S-A) \cos (S-B) \cos (S-C)}$ für $S = \frac{1}{2}(A+B+C)$. Mit diesen Werten fand er dann unter anderen die sphärischen Radien des einem Dreieck umschriebenen und des eingeschriebenen Kreises, die er bezüglich durch die Formeln

$$\operatorname{tg} r = \frac{4 \sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \sin \frac{c}{2}}{d} = \frac{2 \cos S}{\delta},$$

$$\operatorname{tg} \varrho = \frac{4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}{\delta} = \frac{2 \sin s}{d}$$

ausdrückte. Ferner entwickelte er noch die Formel $\cos \frac{1}{2}(A+B+C) = -\frac{d}{4 \cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}}$, sowie die entsprechenden für $\cos \frac{1}{2}(A+B-C)$ u.. s. w. und deren Polarformeln. Eine ganze Reihe der hier gegebenen Gleichungen wurden im 19. Jahrhundert von Cagnoli, Gudermann und anderen wieder neu gefunden.[3])

Außerdem zeigte er, daß auch auf der Kugel ein dem Ptolemäischen Satze vom Sehnenviereck ähnlicher existiert, und leitete Formeln ab, durch welche die Winkel und die Winkelsumme eines sphärischen eingeschriebenen Vierecks durch die Seiten ausgedrückt werden. Endlich wurde noch der Satz, über den Ort eines Punktes, dessen Ver-

---

1) Acta Acad. Petrop. 1781, pars 1, 112 ff. Steiner hat später diesen Satz ergänzt und durch rein geometrische Betrachtung erwiesen (1827). — 2) Ebenda, 1782, pars 1, 58—103. Theor. 12, 13, 15 und 16; d hatte übrigens schon Euler bestimmt in Novi Comm. Petrop. IV, 158, siehe S. 125, Formel für V. Vgl. auch Lagrange: Journal de l'école Polyt. 6, cah. 272—274, 1798/99. — 3) Vgl. den Beweis von Prouhet. Nouv. Ann. de Mathém. XV, 1856, 91.

bindungsstrahlen mit zwei festen Punkten in konstantem Verhältnis stehen auf die Kugel ausgedehnt und ebenso der bekannte Satz, daß die Schnittpunkte der Seiten eines dem Kreis eingeschriebenen Dreiecks mit den in den Gegenecken errichteten Tangenten in einer Geraden liegen.[1])

Ähnliche Probleme der sphärischen Trigonometrie behandelten auch Eulers Schwiegersohn Nikolaus Fuß (1755—1826)[2]) und der Petersburger Astronom F. Theodor Schubert (1758—1825)[3]), und auch der bekannte Göttinger Professor Abraham Gotthelf Kästner (1719—1800) hat in seinen „Geometrischen Abhandlungen"[4]) und anderwärts verschiedene Aufgaben der ebenen und sphärischen Trigonometrie praktisch behandelt, wenn auch die Eleganz seiner Lösungen durch das beständige Mitschleppen des Sinus totus gegenüber der Behandlungsweise der oben genannten Gelehrten beeinträchtigt wird. In wenig eleganten Formeln teilte auch der französische Abbé Jean Paul de Gua de Malves (1712—1785), der sich aus Liebhaberei mit Mathematik beschäftigte und 1741 Mitglied der Pariser Akademie wurde, einige nicht uninteressante Sätze mit. Trotz Euler und seinen Nachfolgern suchte er nämlich eine neue, aber sehr schwerfällige Bezeichnungsweise in die Trigonometrie einzuführen, auf die wir noch zu sprechen kommen werden, baute unter Benützung derselben ein System der Trigonometrie auf und veröffentlichte außerdem einige Formeln zur Bestimmung des sphärischen Exzesses, von denen wir als neu die folgende $\operatorname{ctg}\frac{\varepsilon}{2} = \operatorname{ctg}\frac{c}{2}\operatorname{ctg}\frac{a}{2}\operatorname{cosec} B + \operatorname{ctg} B$[5]) hervorheben, sowie Lehrsätze über den Tetraederinhalt, in denen er jedoch zum Teile mit Euler zusammentraf.

Auch der große Lagrange[6]), Eulers Nachfolger als Direktor der mathematischen Klasse der Berliner Akademie, beschäftigte sich vorübergehend mit trigonometrischen Fragen. Außer der schon wiederholt angeführten Abhandlung[7]) „De quelques problèmes relatifs aux triangles sphériques, avec une analyse complète de ces triangles", auf die wir noch weiter unten eingehen werden, schrieb er 1774 „Solutions

1) Acta Acad. Petrop. 1782, pars II, 85—95. — 2) Nova Acta Acad. Petrop. II, 1788 und III, 1788. — 3) Ebenda, IV, 1786, 89. XII, 1794, erschienen 1801. — 4) Geometrische Abhandlungen, 2 Sammlungen, 1790—1791. Kästner war von 1753 bis zu seinem Tode Professor der Mathematik in Göttingen und verdankt seine Berühmtheit namentlich seinen Lehrerfolgen. — 5) Mémoires de l'Académie de Paris, 1783, 359. — 6) Joseph Louis Lagrange (1736—1813) wurde 1755 Professor der Mathematik an der Artillerieschule zu Turin, dann Mitglied der Berliner Akademie, 1787 begab er sich nach Paris. Später wurde er Professor an der École normale und der École polytechnique. — 7) Siehe S. 125 und 137, Anmerk. 2.

de quelques problèmes d'Astronomie sphérique par le moyen des séries", welche in den Mémoires der Berliner Akademie (für das Jahr 1776) 1779 erschien, worin er die Auflösung der Gleichung $\operatorname{tg} x = m \operatorname{tg} y$ nach x durch die Reihe $x = y - \theta \sin 2y + \frac{1}{2}\theta^2 \sin 4y - \frac{1}{3}\theta^3 \sin 6y + \cdots$ gab, in welcher $\theta = \frac{1-m}{1+m}$ bedeutet. Indem er diese Gleichung sowohl mit jenen drei Fundamentalgleichungen des rechtwinkligen sphärischen Dreiecks, in denen Tangenten vorkommen, als auch mit den Neperschen Analogieen identifizierte, gelangte er zu mehreren namentlich in der Astronomie und Geodäsie sehr brauchbaren Lösungen trigonometrischer Aufgaben. Waren z. B. die Winkel β und γ eines sphärischen Dreiecks direkt durch die Seiten b und c und den eingeschlossenen Winkel α zu bestimmen, so benützte er die beiden Analogieen:

$$\operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{2} = \frac{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\sin\frac{b-c}{2}}{\sin\frac{b+c}{2}} \quad \text{und} \quad \operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2} = \frac{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{b-c}{2}}{\cos\frac{b+c}{2}},$$

indem er in der obigen Reihe einmal $x = \frac{\beta-\gamma}{2}$, $y = 90^0 - \frac{\alpha}{2}$ und $m = \frac{\sin\frac{b-c}{2}}{\sin\frac{b+c}{2}}$, das anderemal $x = \frac{\beta+\gamma}{2}$, $y = 90^0 - \frac{\alpha}{2}$, $m = \frac{\cos\frac{b-c}{2}}{\cos\frac{b+c}{2}}$ einführte, wodurch sich Entwicklungen für $\frac{\gamma-\beta-\alpha}{2} + 90^0$ und $\frac{\gamma+\beta+\alpha}{2} - 90^0$ ergaben, die nach den Sinus der Vielfachen von α fortschritten. Durch Addition erhielt er dann

$$\gamma = \operatorname{tg}\frac{c}{2}\left(\operatorname{ctg}\frac{b}{2} + \operatorname{tg}\frac{b}{2}\right)\sin\alpha - \tfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2\frac{c}{2}\left(\operatorname{ctg}^2\frac{b}{2} - \operatorname{tg}^2\frac{b}{2}\right)\sin 2\alpha + \cdots$$

$$\beta = 180^0 - \alpha + \operatorname{tg}\frac{c}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{b}{2} - \operatorname{ctg}\frac{b}{2}\right)\sin\alpha - \tfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2\frac{c}{2}\left(\operatorname{tg}^2\frac{b}{2} + \operatorname{ctg}^2\frac{b}{2}\right)\sin 2\alpha + \cdots$$

Diese beiden Reihen sind um so konvergenter, bemerkt Lagrange, je kleiner c ist und je näher b an 90^0 liegt. Auch zeigt Lagrange in derselben Abhandlung, daß die Methode, welche ihn die obige Formel finden ließ, nämlich die Benützung des Imaginären, auch noch ähnliche Gleichungen komplizierterer Form zu lösen gestattet. Lambert hat 1777 ebenfalls ähnliche Gleichungen durch Reihen gelöst[1]), und desgleichen finden sich in Delambres großer Arbeit über die Bestimmung des Meridianbogens zwischen Dünkirchen und Barzelona[2]) transzendente Gleichungen, wie z. B. $\operatorname{tg} y = \frac{m \sin A}{1 + m \cos A}$

1) Bode, Astronomisches Jahrbuch für 1780, p. 67. — 2) Méthodes analytiques pour la détermination d'un arc du méridien. An VII (1798/99), Paris, 4°, 64 u. 111.

mittelst der Methode der unbestimmten Koeffizienten durch Reihen behandelt. Da jedoch eine Verwendung dieser Gleichungen zur Dreiecksauflösung der höheren Geodäsie angehört, verzichten wir auf weitere Angaben.

Hervorragende Verdienste um die Ausbildung der elementaren Trigonometrie nach der von Euler eingeschlagenen Richtung hin erwarb sich der Italiener Antonio Cagnoli (1743—1816), der sich zuerst als Privatmann in Verona eine Sternwarte erbaute und dann später von Napoleon an das Observatorium in Mailand berufen wurde. Er gehörte der von Lorgna gegründeten Società Italiana an, welche Mathematiker wie Malfatti, Riccati, Ruffini und Ferroni zu den ihren zählte, und wurde nach Lorgnas Tode Präsident dieser gelehrten Genossenschaft. Seine „Trigonometria piana e sferica", welche 1786 italienisch und französisch (Paris in 4°) in erster, 1804 italienisch in zweiter Auflage und 1808 in französischer Sprache nochmals erschien, ist das vollständigste und umfassendste Handbuch jener Zeit, und noch heute wird man manches Interessante und Lesenswerte darin finden. Wenn auch Cagnoli noch immer ausschließlich mit trigonometrischen Linien rechnet, so nimmt er doch die Einheit als Radius an und adoptiert die Eulerschen Bezeichnungen der Funktionen, denen er nur merkwürdigerweise die abkürzende Bezeichnung der Dreiecksseiten nicht zugesellt. Sein Hauptverdienst aber liegt darin, daß er wie Klügel die analytische Rechnung in den Vordergrund stellt und nur die notwendigsten Sätze aus Figuren gewinnt.

Viel wesentlich Neues inbezug auf elementare Trigonometrie zu bringen, war kaum mehr möglich, doch wollen wir das Wenige, was wir bei einer Durchsicht des vortrefflichen Werkes, sowie in einer Abhandlung, die Cagnoli zur Ergänzung in den Memorie della Società Italiana t. VII, 1794 erscheinen ließ, fanden, hier zusammenstellen. Zunächst bringt er den Cosinussatz der ebenen Trigonometrie durch Einführung des Cosinus oder Sinus des halben Winkels und Verwendung eines Hilfswinkels auf eine logarithmisch brauchbare Form. Dies hatte allerdings schon 1777 Johann Tobias Mayer (1752—1830)[1]) ganz in derselben Weise geleistet, Cagnoli scheint jedoch Mayers Schrift nicht gekannt zu haben. Ferner löst[2]) er eine Reihe komplizierterer Dreiecksaufgaben auf sehr elegante Weise, wobei er sich stets die Herstellung einer Endformel zum Ziele setzt. Zu bemerken ist

1) Gründlicher und ausführlicher Unterricht zur praktischen Geometrie, Göttingen 1777, 4 Bände 8°, B I, 12—13. — 2) Cose trigonometriche, Memorie t. VII, 1794, 35 ff. Daselbst sind im ganzen 13 Probleme behandelt.

endlich noch, daß sich in seiner Trigonometrie (1. Aufl. p. 122) auch die Mollweideschen Gleichungen entwickelt und verwendet finden.

Aus seinen Ergänzungen zur sphärischen Trigonometrie entnehmen wir die fundamentale Formel $\sin c \sin a + \cos c \cos a \cos B = \sin A \sin C - \cos A \cos C \cos b$[1]), die erste Relation, welche zwischen den sechs Stücken eines sphärischen Dreiecks gegeben wurde. Ferner ist seine Umgestaltung des Cosinussatzes für logarithmische Rechnung von Interesse. Indem er ihn nämlich in die Gestalt brachte

$$\sin\frac{a}{2} = \sin\frac{(c-b)}{2}\sqrt{1+\frac{\sin c \sin b \sin^2\frac{A}{2}}{\sin^2\frac{c-b}{2}}} \text{ und } \operatorname{tg}^2\varphi = \frac{\sin c \sin b \sin^2\frac{A}{2}}{\sin^2\frac{c-b}{2}}$$

setzte, ergab sich $\sin\frac{a}{2} = \frac{\sin\frac{c-b}{2}}{\cos\varphi}$.[2]) Ferner hat er zuerst (§ 1030—1035) Formeln konstruiert, um die Stücke des rechtwinkligen sphärischen Dreiecks eventuell bis auf Zehntelsekunden genau erhalten zu können. Dabei gelangt er unter anderen zu folgenden drei:

$$\operatorname{tg}\left(45^0+\frac{a}{2}\right) = \sqrt{\frac{\operatorname{tg}\frac{C+c}{2}}{\operatorname{tg}\frac{C-c}{2}}},\quad \operatorname{tg}\left(45^0+\frac{b}{2}\right) = \sqrt{\frac{\sin(C+c)}{\sin(C-c)}},$$

$$\operatorname{tg}\left(45^0+\frac{B}{2}\right) = \sqrt{\frac{\operatorname{ctg}\frac{C+c}{2}}{\operatorname{tg}\frac{C-c}{2}}}.$$

Weiter ist noch anzuführen, daß er die Proportionen, zu welchen zwei rechtwinklige sphärische Dreiecke, die entweder einen Winkel oder die Hypotenuse gemeinsam haben, Anlaß bieten, vollständig entwickelte und außerdem die Formeln ableitete, welche den Zusammenhang der Elemente eines sphärischen Dreiecks mit denen des zugehörigen Sehnendreiecks geben.[3]) Auch um die Auflösung trigono-

---

1) Diese Formel findet sich erst in der Ausgabe von 1808 No. 1139, 326. Sie wurde später oft bewiesen und von A. Cayley 1859 wieder neu aufgefunden. Collected papers IV, 80; Cayleys Beweis unterscheidet sich wenig von dem, den Bretschneider im Journal für Mathem. 1835 XIII, 150 gegeben hat, ist aber einfacher als der Cagnolis. — 2) Steht auch schon im Cose trigonometriche, 1786, Problem VI der sphärischen Probleme. — 3) Kap. VIII der ersten, Kap. XX der Auflage von 1808. Die elegante Formel $\cos A' = \cos A \cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2} + \sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}$ gibt z. B. den Winkel A' des Sehnendreiecks, der dem ∢ A im sphärischen entspricht. In

metrischer Gleichungen hat sich Cagnoli Verdienste erworben. So behandelte er z. B. die wichtige Gleichung $a \cos A + b \sin A = n$, indem er $a = m \cos B$, $b = m \sin B$ setzte. Allerdings war ihm hierin Kästner schon 1772 zuvorgekommen.[1])

§ 2. Tetragonometrie und Polygonometrie.

Die Ausbildung der Formelsprache und die dadurch gewonnene Geschmeidigkeit der analytischen Rechnung ermöglichte die vielseitigsten Anwendungen der trigonometrischen Lehren. Allerdings müssen wir dieselben im allgemeinen von unseren Betrachtungen ausschließen, wollen aber hiervon insofern eine Ausnahme machen, als wir die Lehre von der Berechnung unregelmäßiger Polygone, welche gegen Ende des 18. Jahrhunderts Bearbeitung fand, kurz in den Kreis unserer Betrachtungen ziehen.[2])

Wohl kann jede Berechnung eines Polygons durch Kombination von Dreiecksformeln erledigt werden, da man ja dasselbe nur durch Diagonalen in Dreiecke zu zerlegen braucht. So wurde auch verfahren, bis Lambert in seiner „Anlage zur Tetragonometrie"[3]) zur Berechnung der Vierecke direkt Formeln herstellte, die überflüssige Rechnungen ersparen sollten. Da ein Viereck durch fünf unabhängige Stücke bestimmt wird, so muß zwischen je sechs immer eine Gleichung bestehen und zwar gibt es, wie Lambert zeigt, vier solche Beziehungen, für welche er die vier entsprechenden Formeln aufstellt, ohne sie abzuleiten. Da man jede von diesen nach einem der sechs Stücke auflösen kann, so bekommt man 24 Fälle, von denen jedoch nur 14 verschieden sind, da mehrere Auflösungen dasselbe sagen, und drei Winkel bereits den vierten bestimmen, Umstände, die Lambert nicht berücksichtigt hat. Des Weiteren wird noch eine Diagonale gezogen und untersucht, wie die Stücke dann zu verteilen sind, so daß nicht jedes Dreieck für sich bestimmt ist, sondern beide zusammengenommen werden müssen, wenn man zu einer Hauptgleichung gelangen will. Bei der Abzählung der hierdurch möglichen Fälle entgingen ihm jedoch einige, was dann später Biörnsen und Lexell nachgewiesen

---

einem Briefe an Gerling hat Gauß 1816 die Relation angegeben $\cos A' = \cos \frac{a}{2} \cos \left(A - \frac{u}{2}\right)$, $u = A + B + C - 180^\circ$, Gauß' Werke VIII, 291.

1) Astronomische Abhandlungen 1772. — 2) Die in dieses Kapitel einschlägige Literatur hat für mich Herr Wilhelm Schmidt, ein früherer Teilnehmer meines mathematisch-historischen Seminars, durchgesehen, an seine Mitteilungen schließe ich mich hier an. — 3) Beiträge zum Gebrauche der Mathematik, 1770, II, 175—184.

haben. Auf die Fälle, die durch das Auftreten zweier Diagonalen entstehen, läßt sich weder Lambert noch einer seiner Nachfolger ein.

Zu diesen gehörte der uns schon bekannte Johann Tobias Mayer, der Sohn des gleichnamigen berühmten Astronomen, welcher in seiner Inauguraldissertation 1773[1]) Lamberts Arbeit, deren Irrtümer er auch mit herübernimmt, ausführt. Namentlich geht sein Bestreben dahin, logarithmisch brauchbare Gleichungen zu erhalten, was seine wenn auch mangelhafte Abhandlung immer noch vorteilhaft von dem Buche[2]) unterscheidet, das der Däne Stephan Biörnsen 1780 herausgab. Im übrigen ist das letztere Werk, welches ebenfalls an Lambert anknüpft, weit vollständiger als Mayers Schrift, indem auch die Fälle, welche mit Zuhilfenahme einer Diagonale entstehen, analytisch behandelt sind. In manchen Fällen leitet er auch geometrische Konstruktionen ab und erklärt die auftretenden Doppelwerte. Auch stößt er wiederholt bei seinen Rechnungen auf Gleichungen von höherem als dem zweiten Grade; diese bleiben dann ungelöst und Biörnsen bemerkt, die Geodäten müßten eben solche Fälle zu vermeiden suchen!

Der erste, welcher den geringen Wert solcher Detailuntersuchungen erkennend eine allgemeine Methode zur Berechnung beliebiger Polygone entwickelte, war der uns schon bekannte Petersburger Astronom und Mathematiker Lexell. In zwei Abhandlungen, die den Titel führen „De resolutione polygonorum rectilineorum"[3]) und in den Jahren 1775 und 1776 erschienen, löste er die Aufgabe, aus $2n-3$ Stücken eines n-Eckes, die dasselbe bestimmen, die übrigen zu berechnen, indem er das Polygon auf zwei zueinander senkrechte Linien, wovon er die eine mit einer Seite zusammenfallen läßt, orthogonal projizierte. Die beiden hierdurch sich ergebenden fundamentalen Gleichungen sind in Lexells Schreibweise:

$$a \sin \alpha + b \sin(\alpha+\beta) + c \sin(\alpha+\beta+\gamma) + \cdots l \sin(\alpha+\beta+\gamma+\cdots+\lambda) = 0,$$
$$a \cos \alpha + b \cos(\alpha+\beta) + c \cos(\alpha+\beta+\gamma) + \cdots l \cos(\alpha+\beta+\gamma+\cdots+\lambda) = 0,$$

wobei $a, b, c \ldots l$ die Seitenlängen und $\alpha, \beta, \gamma \ldots \lambda$ die Außenwinkel des Polygons bedeuten, und die Beziehung $\alpha+\beta+\gamma+\cdots+\lambda = 360^0$ besteht. Die beiden Gleichungen werden auch noch dadurch verallgemeinert, daß die Projektion des Polygons auf zwei beliebige sich in einer Ecke schneidende rechtwinklige Achsen vorgenommen

1) Tetragonometriae specimen I, Göttingen 1773. — 2) Introductio in Tetragoniometriam ad mentem Lambert, Hauniae 1780. — 3) Novi commentarii Acad. Petrop. XIX; 1774, 184—236 und XX, 1775, 80—122, publiziert 1775 bezüglich 1776. Lexell hat seine Hauptformeln in einem Briefe dem Engländer Morton beweislos mitgeteilt, der sie dann 1775 in den P. T. LXV, pars 2, 281—282 veröffentlichte; Charles Hutton gab dann im nächsten Band 600—603 einen Beweis derselben, der mit dem Lexells im ganzen übereinstimmt.

wird, und ihre allgemeine Gültigkeit für überschlagene Polygone und solche mit einspringenden Ecken wird an Beispielen dargetan, wobei nur zu beachten ist, daß die Summe der Außenwinkel in solchen Fällen ein Vielfaches von 2π beträgt.

Als spezielle Anwendungen seiner allgemeinen Formeln zeigt Lexell, wie sich aus denselben die Grundgleichungen der Trigonometrie unmittelbar ergeben, leitet dann die vier Hauptgleichungen Lamberts für das Viereck ab und fügt noch die entsprechenden für Fünf- und Sechseck bei. Aus den weitern Resultaten seiner Untersuchungen heben wir noch die Bestimmung der Anzahl der notwendigen Gleichungen für ein n-Eck und die Einteilung derselben in zwei Klassen, je nachdem sie Beziehungen zwischen n Seiten und $n-2$ Winkeln oder zwischen $n-1$ Seiten und $n-1$ Winkeln geben, hervor. Die Relationen der ersten Klasse sind stets von der Form $x^2 = P$ oder $x^2 + Px = Q$ und $\cos\varphi = R$, $\cos\varphi = R\sin\varphi + S$, die von der zweiten Klasse aber haben nur die Gestalt $\operatorname{tg}\varphi = R$, $\sin\varphi = R$, oder $\sin\varphi = R\cos\varphi + S$.

Die zweite Abhandlung Lexells enthält hauptsächlich Detailausführungen seiner allgemeinen Betrachtungen, indem diese auf alle Einzelbestimmungen des Vierecks angewendet werden. Außerdem zieht er auch eine Diagonale mit in Betracht, gibt eine vollständige Aufzählung und Klassifizierung aller möglichen Fälle und weist darauf hin, wie man eine ähnliche Abzählung bei Herzunahme beider Diagonalen bewerkstelligen könne. Gelöst werden dann noch die beiden für die Geodäsie wichtigen Aufgaben: „Aus den vier Seiten und einer Diagonale die andere zu bestimmen“, die sich durch eine quadratisch lösbare Gleichung vierten Grades ergibt, und die schon von Snellius behandelte Aufgabe[1]), aus einer Seite und den vier anliegenden durch die Diagonalen und die Seiten mit ihr gebildeten Winkeln die Gegenseite zu berechnen.

Auf einer andern Grundlage hat Simon L'Huilier (1750—1840), Professor der Mathematik in Genf, eine Polygonometrie entwickelt.[2]) An die Spitze stellte er folgenden Satz: „Läßt man eine Seite des Polygons weg, bildet aus allen andern die Produkte zu je zweien und multipliziert jedes Produkt mit dem Sinus des von den betreffenden Seiten gebildeten Winkels, so ist die Summe dieser $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Produkte gleich dem doppelten Inhalt des Polygons.“ Da man nun immer andere Seiten des Polygons nacheinander weglassen kann, so erhält man n Ausdrücke für den Polygonsinhalt, die einander gleich-

1) Siehe Tl. I, S. 245. — 2) Polygonométrie ou de la mesure des figures rectilignes etc., Paris 1789, 4°.

gesetzt, fundamentale Beziehungen zwischen den Seiten und Winkeln des Polygons liefern. Außer dieser Formelgruppe verschafft sich aber L'Huilier noch zwei Fundamentalformeln, die identisch sind mit Lexells Projektionsformeln, indem er den Polygonsinhalt einmal in der obigen Weise und dann als Summe eines durch eine Diagonale abgeschnittenen Eckdreiecks und des übrigbleibenden Polygons von $n-1$ Seiten bildet. So ergibt sich z. B. für das Fünfeck $ABCDE$ die Gleichung $AE \sin E = AB \sin(B+C+D) + BC \sin(C+D) + CD \sin D$, welche bis auf die Bezeichnung mit Lexells erster Formel übereinstimmt.[1] Übrigens hat L'Huilier, wie er in der Vorrede seines Buches angibt, von Lexells Arbeit erst durch seinen Freund Pfleiderer in Tübingen Nachricht bekommen, nachdem er schon im Besitze seiner Resultate war.

Angewendet hat L'Huilier seine Sätze zur Lösung dreier Hauptprobleme, die er in der Polygonometrie unterschied. Es sind dies folgende: 1) Aus $n-1$ Seiten und $n-2$ Winkeln die fehlenden Stücke zu bestimmen, desgleichen 2) aus allen Winkeln und aus $n-2$ Seiten, 3) aus allen Seiten und aus $n-3$ Winkeln das Polygon zu berechnen. Hierfür werden auch numerische Beispiele durchgeführt. Außerdem hat L'Huilier noch in einer dem Institut national 1799 eingereichten Abhandlung[2]) diese Sätze auf Raumpolygone ausgedehnt und den Hauptsatz der Polyedrometrie aufgestellt, daß jede Seitenfläche eines Polyeders gleich der Summe der übrigen ist, jede mit dem Cosinus des Winkels multipliziert, den sie mit der ersten bildet. Doch wurden die näheren Bedingungen, unter denen dieser Satz allein richtig ist, weder bei L'Huilier, noch bei Carnot[3]), der sich ebenfalls mit den Sätzen der Polyedrometrie und der Polygone im Raume beschäftigte, angegeben.

In einem nur losen Zusammenhang mit den letzterwähnten allgemeinen Sätzen über Polyedermessung stehen die Arbeiten von Lagrange[4]) 1773, und von De Gua 1783 über das Tetraeder; der erstere bestimmte in der ihm eigentümlichen eleganten Weise durch analytische Rechnung die Seitenflächen, das Volumen, die Radien der um- und eingeschriebenen Kugeln u. s. w. für das Tetraeder, während der letztere sich in ziemlich schwerfälliger Weise der elementaren Hilfsmittel hierzu bediente. (Vgl. S. 125, Anm. 2.)

1) Eine etwas andere Formulierung gab dem Satze später Bleibtreu in „Neue und leichte Methode, den Flächeninhalt und die Konstruktion jeder Figur aus den Seiten und Winkeln zu berechnen". Neuwied 1810, 8°. Die beiden Formeln Lexells stehen bei L'Huilier a. a. O. 18 und 20. — 2) Mémoires de l'Institut 1805. — 3) Géométrie de position 1803, 306. — 4) Mémoires de l'Académie de Berlin 1773, Werke Ed. Serret III, 661—692.

§ 3. Trigonometrische Tafeln, Reihenlehre, Zyklometrie und Differentialtrigonometrie.

Von trigonometrisch logarithmischen Tafeln waren in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts die verschiedenen Ausgaben von Gardiners Tafeln, sowie jene von Rivard vielfach in Gebrauch; neu erschienen im Jahre 1760 zu Paris Lecailles und Lalandes Tables des logarithmes pour les Sinus, Tangentes etc. in 12⁰, die namentlich wegen ihrer Handlichkeit sehr beliebt waren und lange im Gebrauch blieben.[1]) In einer Abhandlung von 1761[2]) setzt Lalande ein Interpolationsverfahren zur Berechnung solcher Tafeln auseinander, das sich auf jenes von Mouton (S. 52) stützt, und bedauert sehr, daß dessen Tafeln aller Logarithmen der Funktionen für die Sekunden der ersten und letzten vier Grade nicht veröffentlicht seien. Wir erwähnten schon früher, daß ein Teil von Moutons Berechnungen in die von dem Jesuiten E. Pezenas (1692—1776) besorgte Neuausgabe (1770) der Tafeln Gardiners übergingen.[3]) Camus veröffentlichte in seinem „Cours de Mathématiques" 1755, II eine 13stellige Hilfstafel zur Berechnung der Sinus. Ferner erschien 1760 zu Haarlem eine Tafel der Funktionen für jede Minute der acht ersten Grade auf 10 Dezimalen von Dirk Klinkenberg[4]) (1709—1799). Zehn Jahre später veröffentlichte Lambert seine schon erwähnten „Zusätze zu den logarithmisch trigonometrischen Tabellen zur Erleichterung und Abkürzung der bei Anwendung der Mathematik vorfallenden Berechnungen" (Berlin 1780 in 8⁰). Von dieser auf eine Anregung Lagranges entstandenen[5]) Tafelsammlung interessiert uns außer den schon früher erwähnten Tafeln zunächst Tafel XIX p. 137, welche die Sinus von 3⁰ zu 3⁰ in algebraischen Ausdrücken enthält, um gegebenen Falls verschiedene Rechnungen in aller Schärfe vornehmen zu können, die man mit den gewöhnlichen Tafeln nur auf eine begrenzte Anzahl Dezimalen führen kann. Über die Aufstellung dieser Tabelle verbreitet er sich in seinen Beiträgen II (133—139) und zeigt, daß die einzelnen Funktionswerte aus 15 verschiedenen Wurzelwerten zusammengesetzt

---

1) Poggendorff, Biogr. lit. Handwörterb. führt Auflagen von 1781, 1799, 1804 an und Glaisher a. a. O. 113 fünfstellige Logarithmen der trigonometrischen Funktionen von 1805, sowie siebenstellige von 1829. — 2) Sur les interpolations ou sur l'usage des différences secondes troisièmes etc. Mémoires de l'Académie de Paris 1761, 125—139. — 3) Pezenas hat auch eine Abhandlung über Herstellung einer Tafel zur Behandlung aller sphärischen Dreiecksfälle geschrieben: Mémoire de réduire en tables la solution de tous les triangles sphériques, 1772, Avignon 4⁰. Wir konnten jedoch dieselbe nicht einsehen. — 4) Korte Verhandeling over de Sinus etc. Verh. Hol. Maatsh. te Haarlem 1760, 258. — 5) Brief an D'Alembert vom 4. April 1771. Lagrange Oeuvres. Ed. Serret XIII, 195.

sind und aus diesen sich nur durch Addieren und Subtrahieren berechnen lassen. Cagnoli hat später (1794)[1]) eine Ableitung derselben gegeben. In Tafel XX (139—141) gab Lambert eine Zusammenstellung der wichtigsten goniometrischen Formeln in ganz moderner Schreibweise, Tafel XXIII (146—149) bot die Länge der Kreisbögen auf 27 Dezimalen für alle Grade von 1^0 bis 100^0, von da ab in Intervallen von 30^0 und endlich noch für Minuten und Sekunden. In Tafel XXIV (150—151) stellte er die Werte der Sinus und Cosinus für sehr kleine Winkel, in Tafel XXV (152—160) die Sinus aller Grade mit 1, 2, 3 ... 9 multipliziert zusammen; Tafel XXVI enthält die Sinus, Tangenten, Sekanten der Winkel von Grad zu Grad und ihre Logarithmen, und Tafel XXVIII (198—201) ist für die Interpolation bestimmt, mit der sich Lambert auch in den „Beiträgen" (III, 66) beschäftigte.[2]) Auch seine Forschungen über rationale Trigonometrie müssen hier erwähnt werden. Diese knüpfen sich an einen Brief vom 15. Oktober 1773 an, in welchem ihm ein gewisser Pater Simon Baum vom St. Salvatororden mitteilte[3]), daß er 223 Sinuswerte in rationalen Zahlen bestimmt habe und noch 20000 zu berechnen gedenke, welche zur Behandlung von Dreiecken dienen, deren Seiten und Inhalt rational sind. Wir erinnern uns, daß schon Vieta einen Kanon für solche Dreiecke gegeben hatte (Tl. I, 159), den weder Baum noch Lambert gekannt zu haben scheinen, und daß auch De Lagny sich mit ähnlichen Betrachtungen abgab. Lambert antwortete nun am 14. Dezember 1773 dem Baum, er habe eine Tafel aller Brüche, deren Nenner 100 ist, berechnet, und fügt bei, es sei genügend, 200 rationale Sinus zu finden, die er schon aus dieser Tafel finden könne. Ferner sei allgemein $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$ gesetzt, so ist $\sin 2\alpha = \frac{2ab}{b^2+a^2}$, $\cos 2\alpha = \frac{b^2-a^2}{b^2+a^2}$, und hieraus z. B. für $\frac{a}{b} = \frac{3}{11}$, $\sin 2\alpha = \frac{33}{65}$, $\cos 2\alpha = \frac{56}{65}$, $\alpha = 30^0\,30'\,27''$. Lambert hat selbst eine solche Tafel nie veröffentlicht, wohl aber findet sich eine nach seiner Methode berechnet in der Tafelsammlung von Johann Karl Schulze, die 1778 in zwei Bänden in Berlin erschien.[4]) Es ist dies

---

1) Cose trigonometriche. Memoire della Società Italiana VII, 1794, 2—3. Vgl. die ähnliche Tafel von Wallis (S. 55). In neuerer Zeit hat E. Gelin eine ebensolche Tafel auch für die Tangenten und Sekanten veröffentlicht, Mathesis VIII, 1888. — 2) Lamberts Tafelsammlung wurde 1798 auf Kosten der Lissaboner Akademie lateinisch herausgegeben. — 3) Deutscher gelehrter Briefwechsel Lamberts, herausgegeben von Johann II. Bernoulli I, 270, ferner beziehen sich hierauf noch die Briefe vom 14. Dezember 1773 und vom 16. Mai 1774, II. — 4) Die Tafel für rationale Trigonometrie steht daselbst II, 308—311 und gibt für 100 rechtwinklige Dreiecke die Seiten, für welche die Tangente des halben

eine sowohl durch ihre Anordnung als auch durch die sorgfältige Bearbeitung der meisten darin enthaltenen Tafeln sehr wertvolle Sammlung. Es finden sich da, außer den siebenstelligen Briggsschen Logarithmen der Zahlen von 1 bis 101000, die natürlichen oder hyperbolischen Logarithmen der Primzahlen von 1 bis 10000, die der holländische Artillerieoffizier Wolfram auf 48 Dezimalen berechnet hatte, ferner eine Tabelle für die Logarithmen der Sinus und Tangenten kleiner Bögen von 0^0 bis 2^0 von Sekunde zu Sekunde berechnet, dann im II. Bande Tafeln der Sinus, Tangenten und Sekanten mit den zugehörigen Briggsschen und hyperbolischen Logarithmen für die 4 ersten und 4 letzten Grade von 10″ zu 10″, für den übrigen Teil des Quadranten aber von Minute zu Minute berechnet (260 Seiten). Auch die Länge der „Cirkulbögen“ für alle Grade bis auf 27 Dezimalen, ferner für alle Minuten und Sekunden ($r = 1$) sind angegeben, und außerdem findet sich noch eine Interpolationstafel aufgenommen.

Das starke Bedürfnis nach Logarithmentafeln scheint jedoch Schulzes Werk nicht gedeckt zu haben, weshalb der bekannte Georg von Vega verschiedene ähnliche Werke erscheinen ließ. Zunächst kamen heraus „Logarithmische, trigonometrische und andere zum Gebrauche der Mathematik eingerichtete Tafeln und Formeln“, Wien 1783, 8^0, die in zahllosen Neuauflagen und Bearbeitungen bis in unsere Tage in Gebrauch blieben. Vorausgeschickt ist hier ein Verzeichnis von Fehlern bei Schulze, Gardiner (Avignoner Ausgabe von 1770), Vlacq, Pitiscus etc., sowie die Formeln zu Berechnungen in der sphärischen Trigonometrie, die in logarithmischer Gestalt angegeben sind. Dann umfaßt das Werk außer den gewöhnlichen Logarithmen 7stellige Tafeln der Logarithmen der Sinus und Tangenten, der Funktionen selbst für den Radius 1, der Länge der Kreisbögen und verschiedene den Kreis betreffende Reihen und Formeln. 1793 erschien dann „Logarithmisch-trigonometrisches Handbuch“ und 1794 Vegas vollständigstes und bedeutendstes Werk in dieser Richtung, der „Thesaurus logarithmorum completus ex Arithmetica logarithmica, et ex Trigonometria arteficiali, Lipsiae 1794, 2^0. Hierin ist für uns von Interesse die Tafel II: Magnus Canon logarithmorum vulgarium trigonometricus, welche die Logarithmen der Sinus, Cosinus, Tangenten und Cotangenten auf 10 Dezimalen enthält, und zwar von 0^0 bis 2^0 in Intervallen von 1″ und für die übrigen Winkel von 10″ zu 10″

spitzen Winkels $> \frac{1}{25}$ ist. Leider enthielt die Tafel so viele Fehler, daß sie Bretschneider 1841 noch einmal neu berechnen mußte: Archiv für Mathematik und Physik I, 96—101. — Schulze (1749—1790) war ein Schüler Lamberts und wurde Professor der Mathematik und Akademiker in Berlin.

mit Angabe der Differenzen. Diese Tafel umfaßt 318 Folioseiten. Außerdem findet man noch darin Tafeln für Kreisbogenlängen (11 Dezim.), sowie eine umfassende Sammlung trigonometrischer Formeln. Bemerkt mag noch werden, daß außer den selbstverständlich vorhandenen Briggsschen Logarithmen der Zahlen (10 Dezim.) auch noch Wolframs hyperbolische Logarithmen der Primzahlen (48 Dezim.), die wir zum erstenmal bei Schulze trafen, aufgenommen sind. Vegas „Thesaurus" war, wie er selbst angibt, eine Neuausgabe von Vlacqs Tafeln, und Vega glaubte die Fehler jener Tabellen so verbessert zu haben, daß er für jeden ihm angezeigten Fehler einen Dukaten zu zahlen versprach. Gauß hat nachmals[1]) die Richtigkeit der Vegaschen Tafeln geprüft und gefunden, daß wenn man verlangt, die Tabulargröße dürfe niemals um mehr als eine halbe Einheit der letzten Dezimale von dem wahren Werte abweichen, was, um fehlerfreie Rechnungen zu erzielen, verlangt werden muß, unter den 68038 irrationalen Logarithmen der Tafel der trigonometrischen Funktionen 47746 ungenaue zu erwarten sind, und zwar ergibt sich als mittlerer Fehler für die Sinus 1,18, für die Cosinus[2]) 0,92, für die Tangenten 1,78 — letztere sind nämlich die abgeleiteten. Man sieht hieraus, daß strengeren Genauigkeitsforderungen durch Vegas Werk keineswegs genügt wurde.

Ein Jahr nach dem Erscheinen des Thesaurus kam in Paris die Tafelsammlung von Callet heraus[3]), die im ganzen 11 wichtige Tafeln in einem nicht übermäßig dicken Oktavbande vereinigte und beide Teilungen des Quadranten berücksichtigte. Es ist dies nach Glaishers Urteil die vollständigste und praktisch brauchbarste Sammlung, die überhaupt publiziert wurde.[4]) Wahrscheinlich hat Callet seine Logarithmen der Sinus durch Interpolation aus der „Trigonometria artificialis" von Vlacq bestimmt.[5])

In England schloß sich an die fünfte Auflage von Sherwins Tafel, die sehr fehlerhaft war, die erste 6stellige Logarithmentafel

---

1) Astronomische Nachrichten 1851, Nr. 756. Werke III, 257—264. Seine Schätzung der Fehlermenge wurde aber von v. Leber in „Tabularum ad faciliorem interpolationis computationem utilium Trias, Vindob. 1897 als übertrieben erklärt. — 2) Der Grund dafür, daß die Cosinus im allgemeinen richtiger berechnet sind als die Sinus, wurde in der Formel entdeckt, mit welcher Vlacq dieselben bestimmte: Montly Notices of the R. Astr. Soc. for Mai 1873. — 3) Tables portatives de Logarithmes 1795, 8°. Die umfangreiche Einleitung (118 Seiten) enthält eine genaue Angabe der Berechnung der Tafeln. Neudrucke: 1827, 1829. 1853, 1890. — 4) Report of the Brit. Assoc. 1873, 92, daselbst findet man auch eine genaue Inhaltsangabe. — 5) Glaisher nach Hobert und Ideler a. a. O. 93, Fehlerverzeichnis bei Ch. M. Schols, Annales de l'École Poly. de Delft III, 1887, 130—139.

von Samuel Dunn 1784[1]) an, welcher Charles Huttons treffliche „Mathematical tables" 1785 folgten, sie erlebten bis 1858 eine Menge von Neuauflagen in beständiger Verbesserung. Die ersten 6 derselben enthalten jene wertvolle Einleitung über die Geschichte der Logarithmen, deren wir uns schon so oft bedienten. Außerdem hat Hutton[2]) in seinem großen geodätischen Werke „Treatise on mensuration" (London 1770, 4°) 618—646 eine Tafel der Flächeninhalte der Kreissegmente gegeben, deren Höhen (sinus versus) nach Zehntausendsteln des Radius $\frac{1}{2}$ fortschreiten. (Eine ähnliche Tafel gab auch Lambert, die dann später Johann Tobias Mayer in seiner Anleitung zur praktischen Stereometrie, 2. Aufl. 1820 verbesserte.) Ein bedeutendes Werk ist auch die dreibändige von Michael Taylor 1792 herausgegebene Tafelsammlung, deren dritter Band auf 450 Seiten die Logarithmen der trigonometrischen Funktionen für alle Winkelsekunden des Quadranten 7stellig enthält.[3])

Als man in Frankreich in den ersten Jahren der großen Umwälzung, welche die Revolution auf allen Gebieten hervorgerufen hatte, auch die Maße und Gewichte reformierte und überall das Dezimalsystem einführte, lag es nahe, den schon früher vereinzelt aufgetauchten Gedanken der Dezimalteilung des Winkels wieder aufzunehmen und dafür neue logarithmisch trigonometrische Tafeln zu schaffen, ähnlich wie sie einst Briggs berechnet hatte. Da aber damals in der neuen Republik alles monumental sein mußte, so sollten diese Tafeln sowohl an Genauigkeit als an Umfang alles Dagewesene übertreffen. Mit der Leitung des Unternehmens wurde 1794 der zum Vorstande des Kadasterbureaus ernannte Ingenieur de Prony (1755—1839) betraut, der seine Hilfsarbeiter in drei Gruppen teilte. Die Herstellung der für die Rechnungen notwendigen Formeln lag in den Händen berühmter Mathematiker, wie Delambre und Legendre, diese bildeten die erste Gruppe; die zweite Abteilung bestand aus Rechnern, welche mit der Analysis vertraut waren, während die dritte Sektion nur die Additionen der Differenzenrechnungen auszuführen hatte. Sie rekrutierte sich hauptsächlich aus den durch das neue Regime brodlos gewordenen Friseuren und Perrückenmachern. Die ganze rechnerische Arbeit wurde von zwei Gruppen, die nicht miteinander in Beziehung standen, vollständig ausgeführt und dann ver-

1) Tables of correct an concise logarithms for numbers, sines, tangents, secants etc. London 1784. 8°. — 2) Charles Hutton (1737—1823) war Professor der Mathematik zu Woolwich. In einer Notiz in den P. T. 74, p. 21 ff. hat er auch Vorschriften zur Anfertigung einer trigonometrischen Tafel für im Längenmaß gegebene Bögen entwickelt. — 3) Vgl. Glaisher a. a. O., 135.

glichen. Dabei vollzog man[1]) die Berechnung der Sinus von 10^0 zu 10^0 mittelst der Reihe, die Sinus der zwischenliegenden Bögen von 1^0 zu 1^0 wurden mit der Formel $\sin(a+b) = 2\cos a \sin b + \sin(a-b)$ bestimmt und alle diese Sinus wurden verifiziert durch die von Euler herstammende Formel $\sin x + \sin(40^0 - x) + \sin(80^0 + x) = \sin(40^0 + x) + \sin(80^0 - x)$. Alles übrige wurde durch eine geschickt angelegte Differenzenrechnung ausgefüllt, deren auf Moutons Methode beruhende Anordnung man hauptsächlich Legendre verdankte (Connaissance de temps 1817, 219—233). Das Werk umschließt handschriftlich 17 Voll. in fol. und enthält neben einer ausführlichen Einleitung über die Herstellung etc. der Tafeln die natürlichen Sinus für jeden 10000sten Teil des Quadranten auf 25 Dezimalen, um sie auf 22 sicher zu haben, mit Angabe von 7 oder 8 Kolonnen von Differenzen, ferner die Logarithmen der Sinus und der Tangenten für jedes Hunderttausendteilchen des Quadranten auf 14 Dezimalen mit 5 Differenzen, dann die Logarithmen der Verhältnisse der Sinus und der Tangenten zu ihren Bögen für die 5000 ersten Hunderttausendstel des Quadranten in 14 Dezimalen, weiter die Logarithmen der Zahlen von 1 bis 10 000 auf 19 Dezimalen und die der Zahlen von 10 000 bis 200 000 mit 14 Dezimalstellen und 5 Differenzreihen. Die geplante Berechnung wurde also glücklich zu Ende geführt, und auch der Druck war begonnen, mußte aber wegen der Zerrüttung der Finanzen eingestellt werden und ist seither nicht wieder in Aufnahme gekommen, so daß dieses höchst verdienstliche Riesenwerk der mathematischen Welt bisher vorenthalten blieb.[2]) Da übrigens die Dezimalteilung des Quadranten nicht allgemein Eingang fand, so ist der wirkliche Wert der Tafeln bedeutend gesunken. Übrigens sind kleinere Tafeln, welche diese Einteilung zugrunde legen, bald darauf erschienen, so in Frankreich die „Tables trigonométriques décimales“ von Borda, ver-

---

1) Mémoires de l'Institut V. an XII, 56—66: Rapport sur les grandes tables trigonométriques décimales du cadastre par Lagrange, Laplace et Delambre und Bulletin de la Société Philomathique de Paris. III, 1811. Bericht von denselben. Vgl. auch Comptes rendus de l'Académie de Paris 1858, XLVI, 911—912; ferner Annales de l'Observatoire impérial de Paris IV, 1858, 123—150, endlich Nouvelles Annales XIV, 1855, 14—17 des historischen Teils. Vgl. auch noch Glaisher a. a. O. 56—57 und Klügel, Mathem. Wörterbuch III, 568—569. — 2) In neuerer Zeit, 1891, wurde ein revidierter Auszug aus den Tables de Cadastre veröffentlicht; er enthält die Logarithmen von 1 bis 120 000 und die der trigonometrischen Linien auf 8 Dezimalen. Inwieweit die Zahlen des großen Tafelwerkes wirklich verlässig sind, läßt sich natürlich nicht entscheiden. Der Schotte Eduard Sang hat über diesen Punkt mit dem Franzosen Lefort eine Kontroverse ausgefochten (Proceedings of the R. Society of Edinburgh VIII, 1875), die aber keine völlige Klarheit gebracht hat.

mehrt und herausgegeben von J. B. J. Delambre (an. IX) 1800/01 in 4° mit einer Einleitung, in welcher der letztere die Methode der Berechnung auseinandersetzte, und in Deutschland die „Nouvelles tables trigonométriques“ Berlin 1799 in 8° von Hobert und Ideler, welche die Hundertteilung des Quadranten voraussetzten und sehr sorgfältig berechnet sind.[1]) Auch hier ist die Art der Berechnung in einer Einleitung auseinandergesetzt. Alle die verschiedenen Methoden, deren man sich damals zur Berechnung der Tafeln bediente, gipfeln in der Benutzung der Reihen für weiter entfernte Argumentenwerte und der Interpolation der zwischenliegenden mittelst Differenzreihen. Eine genaue Auseinandersetzung, auf die wir uns hier nicht einlassen können, findet man bei Klügel, Mathematisches Wörterbuch, Artikel Cyklotechnie I, 683—694; wir bemerken nur noch, daß gerade die Herstellung der „Grandes tables de Cadastre“ das Übergewicht der auf bloßer Addition beruhenden Differenzenrechnung über die direkte Berechnung mittelst Formeln deutlich ins Licht setzte, und das Gleiche lehrte Hobert und Idelers Methode.[2])

Nachdem wir im Vorhergehenden einen kurzen Überblick über die wichtigsten Tafelwerke gegeben haben — eine Bibliographie derselben zu liefern kann natürlich nicht unsere Aufgabe sein — wollen wir noch auf die Ergänzungen zu sprechen kommen, welche die sogenannte „höhere Trigonometrie“ nach Euler gefunden hatte. Wir erinnern uns, daß Euler bereits 1743 die Summe einer endlichen Zahl von Sinus oder Cosinus, deren Argumente in arithmetischer Progression fortschreiten, gewann, indem er sich divergenter unendlicher Reihen bediente (S. 109); Klügel[3]), Cagnoli[4]) und später Francesco Pezzi[5]) († 1813) gaben hierfür die einfachen und stichhaltigen Ableitungen, deren wir uns noch heute bedienen, und Cagnoli fügte noch die Summen der n^{ten} Potenzen der Sinus und Cosinus solcher Winkel hinzu, während eine Ableitung dieser Summen mit Hilfe des Imaginären Gregorio Fontana[6]) (1735—1803) gegeben

---

1) Diese Tafel ist die erste, welche in Deutschland die zentesimale Teilung einzuführen suchte. Über die ihr vorhergehenden Versuche, solche Tafeln herzustellen, findet man einiges in der Einleitung zu Schulzes Neuen Tafeln und in Bodes Astronomischem Jahrbuch für 1798. — 2) In England scheint man später zu dieser Erkenntnis gelangt zu sein, denn in den von uns oft erwähnten Scriptores Logarithmici von Maseres befinden sich (VI) noch unendlich mühsame Berechnungen von sin 1′ und tg 1′ aus den Teilungsgleichungen. So wird z. B. sin 1′ von Ch. Hutton 1777 aus sin 60° durch 2 Fünfteilungen, 2 Dreiteilungen und 4 Halbierungen auf 15 Dezim. entwickelt, allerdings bemerkt Hutton selbst, daß diese Methode jener mit den Reihen weit nachstehe. — 3) Analytische Trigonometrie 1770, 39—43. — 4) Trigonometria 2. Aufl. 117—118. — 5) Memorie della Società Italiana XI, 1803, 21 ff. — 6) Ebenda II, 1784, 424 ff.

hat. Aber auch diese Schriftsteller glaubten noch die Reihen ohne Rücksicht auf Konvergenz oder Divergenz ins Unendliche fortsetzen zu dürfen.

Auch für die Sinus und Cosinus ganzzahliger Vielfachen eines Winkels ausgedrückt durch die Potenzen der Sinus und Cosinus oder einer dieser Funktionen allein haben Klügel[1]), Cagnoli[2]) und andere neue Ableitungen gegeben, von denen die des Irländers John Brinkley[3]) (1797), der das Koeffizientengesetz mittelst des Schlusses von n auf $n+1$ bewies, die stichhaltigste ist.

Für ein ganzzahliges gerades oder ungerades n liefern diese Entwicklungen bekanntlich direkt die Teilungsgleichungen der trigonometrischen Funktionen. Daß im ersteren Fall $2n$, im letzteren n Wurzeln vorhanden sind, wußte man seit Wallis, über Zeichen und Gruppierung dieser Wurzeln waren sich jedoch trotz Euler keineswegs alle Mathematiker klar, so daß noch 1768 D'Alembert in seinen Opuscules t. V, 222—227, eine Untersuchung darüber anstellen konnte; doch hat diese Frage A. G. Kästner schon früher 1756[4]) in seiner breiten Weise behandelt, und Klügel, Karsten und andere folgten ihm nach. Der erstere der beiden zuletztgenannten Männer benützte diese Wurzeln, um $\sin nz$ und $\cos nz$ durch Produkte darzustellen, was ja übrigens auch Euler in der „Introductio" (Kap. XIV) schon getan hatte, ohne sich jedoch viel mit Begründungen aufzuhalten. Auch knüpfte Klügel hieran einen Beweis des Satzes von Cotes, den wir schon früher erwähnten (S. 77, Anm. 5).

Die Potenzreihen für $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{tg} z$ wurden größtenteils mit Eulers Methode abgeleitet, oder indem man in der mit unbestimmten Koeffizienten angenommenen Form die Koeffizienten durch Differentialrechnung bestimmte, oder sich, wie L'Huilier[5]), der möglichst

1) A. a. O. 46—65. — 2) Cose trigonometriche, Memorie della Società Italiana VII, 1794, und Trigonometria 104—108, woselbst übrigens wieder kritiklos unendliche Reihen benutzt werden. Auch werden in dem gleichen Kap. IX die umgekehrten Formeln für $\sin^n x$ und $\cos^n x$ mittelst des Imaginären abgeleitet. — 3) Transactions of the R. Irish Academy VII, 1800, 27 ff. Brinkley erwähnt hier, daß Waring zuerst für ein ungerades n mit seinem Satze über die Potenzsummen einen exakten Beweis gegeben habe (Curvarum algebraicarum proprietates 1772. Theor. 26), daß aber diese Methode für ein gerades n versage. — 4) Unde plures insint radices aequationibus sectiones angulares definientibus, Dissertation 1756, Altdorfii 1771. Über die algebraische Auflösbarkeit der einen speziellen Fall der obigen bildenden Kreisteilungsgleichungen sah man damals noch sehr unklar, so sagt Mosdorff, Acta Erud. 1751, man werde wohl kaum jemals dazu kommen, zu unterscheiden, wann sich diese Gleichungen algebraisch lösen lassen. — 5) P. T. 1796, 142. Vgl. ferner L'Huilier: Principiorum calculi differentialis et integralis expositio elementaris. Tubingae 1795, 4°, Kap. 3.

elementar verfahren wollte, der Differenzenrechnung bediente. Eine elementare Ableitung gab auch Jakob de Gelder 1798.[1]) In umfassendster Weise aber hat den analytischen Teil der Trigonometrie Pietro Ferroni mit Hilfe des Infinitesimalkalkuls in seinem großen Werke „Magnitudinum exponentialium logarithmorum et trigonometriae sublimis theoria nova methodo pertracta“ Flor. 1782, 4°[2]) behandelt.

Versuche, den Charakter der Zahl π zu ergründen, wurden, wie wir sahen, schon von De Lagny gemacht (S. 81 und 83), und auch Euler hat sich dafür wenigstens interessiert (S. 117—118), aber ein Beweis für die längst vermutete Irrationalität gelang erst H. Lambert[3]) im Jahre 1767. Er knüpft unmittelbar an den schon von De Lagny gebrachten Satz an, daß, wenn v ein rationaler Bogen ist, tg v irrational sein muß und umgekehrt, und beweist denselben „außerordentlich scharfsinnig und im wesentlichen vollkommen einwandfrei“.[4]) Damit war ein bedeutender Schritt in der Erkenntnis des Charakters, welchen das Verhältnis des Durchmessers zum Kreisumfang zeigt, getan, ein Schritt, den jedoch Lamberts Zeitgenossen, wie es scheint, nicht zu schätzen wußten.

Was die zahlenmäßige Berechnung von π anlangt, so ist seit Machin und Euler wenig Neues hinzugekommen; man zerlegte an die Methode dieser beiden anschließend $\frac{\pi}{4}$ in zwei Bögen mit rationalen Tangenten, was natürlich auf die verschiedenste Weise möglich ist. So gab Charles Hutton 1776[5]) drei neue solche Zerlegungen an und suchte die entstehenden Arctg-Reihen möglichst bequem für die Rechnung zu gestalten, indem er jene S. 115 mitgeteilte Reihe ver-

---

1) Verhandelingen van het Genootschap te Rotterdam. XII, 1798. — 2) Kap. 5—8. Vgl. auch Pasquich, Unterricht in der mathem. Analysis und Maschinenlehre I, Leipz. 1790. — 3) Memoire sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendantes circulaires et logarithmiques. Lu en 1767. Histoire de l'Acad. de Berlin, Année 1761 (sic!) 265—322 und eine populäre Darstellung in „Beiträgen zum Gebrauche der Mathematik II, 140—169. — 4) Man sehe über den Wert von Lamberts Beweis: A. Pringsheim „Über die ersten Beweise der Irrationalität von e und π“. Sitzungsberichte der mathem. phys. Klasse der k. bayr. Akad. der Wiss. 1898, XXVIII, Heft 2, 325—337. Hierzu sei noch bemerkt, daß Lambert in seiner Erkenntnis noch weiter ging, indem er in einem Briefe vom 10. Januar 1768 an Holland (Lamberts deutscher gelehrter Briefwechsel. Hrsgg. v. J. Bernoulli, I, 254) sagt: „Die Art, wie ich dies bewiesen habe, läßt sich soweit ausdehnen, daß zirkuläre und logarithmische Größen nicht Wurzeln von rationalen Gleichungen sein können.“ Eine solche Ausdehnung hat er allerdings nicht gegeben. — 5) P. T. LXVI, 1776, 476 ff.; vgl. auch Maseres, Scriptores logarithmici III, 219—235, Hellins, P. T. 1794, pars 2, 217 und Glaisher im Messenger

wendete, und Vega bestimmte π aus der Eulerschen Formel $\frac{\pi}{4} = 5 \operatorname{arctg} \frac{1}{7} + 2 \operatorname{arctg} \frac{3}{79}$ (siehe S. 115) auf 140 Stellen[1]), von denen 136 richtig sind, während Karl Buzengeiger (1771—1835) die Formel $\frac{\pi}{4} = 8 \operatorname{arctg} \frac{1}{10} - 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{515} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239}$ angab[2]), und Klügel allgemein zeigte[3]), wie man solche Formeln erhalten könne, was ja übrigens auch schon Euler, wenn auch in etwas anderer Weise, getan hatte.

Die Bestrebungen, welche wir zusammenfassend mit dem Namen Differentialtrigonometrie bezeichnet haben, und welche in den Bedürfnissen der Astronomie und Geodäsie ihre Entstehung fanden, waren zunächst durch Cotes in Aufnahme gekommen (S. 78—79), der die notwendigsten Sätze geometrisch entwickelt hatte. Seine Abhandlung wurde auch von Mauduit unverändert in dessen „Astronomie sphérique“ 1765 aufgenommen, obgleich De la Caille schon 1741 in den Pariser Mémoires einen „Calcul des différences dans la trigonométrie sphérique“ publiziert hatte, in welchem er Cotes' 18 Theoreme in 24 Formeln vereinigte, die er in einer Tabelle übersichtlich zusammenstellte und auf astronomische Aufgaben anwandte. Später haben sich namentlich Klügel, Boscowich und Cagnoli mit Ausbildung dieses Wissenszweiges beschäftigt. Ersterer widmete ihm das 8. Kapitel seiner schon oft genannten „Analytischen Trigonometrie“ und einen Aufsatz in Bodes Astronomischem Jahrbuch für 1793[4]) und behandelte die vier wichtigsten Fälle[5]) für geradlinige und sphärische Dreiecke mit Differentialrechnung.

---

of Mathematics II, 1873, 119 ff., der feststellt, welche Reihen Euler und welche Hutton zugehören.

1) Thesaurus logarithmorum, 633. Zur Kontrolle nahm er auch die Formel $\frac{\pi}{4} = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \operatorname{arctg} \frac{1}{7}$. Ein von Zach zu Oxford aufgefundenes Manuskript von unbekannter Herkunft gab π auf 154 Stellen, welche später Thibaut in seinem „Grundriß der reinen Mathematik“ (4. Aufl. von 1822) veröffentlichte; vgl. Wolf, H. A. I, 177. — 2) Klügel I, 666. — 3) Archiv der Mathem. von Hindenburg II, 308. Vgl. auch Pfaff, Disquisitiones analyticae 1794, I, § X. In dem gleichen Bande des Archivs findet sich eine Berechnung von π auf 160 Dezimalen von Bürmann aus der Machinschen Formel, p. 487—494. — 4) Trigonometrische Variationenrechnung zum Gebrauche bei Berechnung der Sonnen- und Mondfinsternisse a. a. O. 178—182, Berlin 1790. — 5) Diese sind: eine Seite und der anliegende Winkel, eine Seite und der gegenüberstehende Winkel, zwei Seiten und endlich zwei Winkel in einem Dreieck sind unveränderlich, während die übrigen Stücke infolge der Veränderung eines unter ihnen variieren. In der angeführten Abhandlung läßt er nur ein Stück des Dreiecks konstant und untersucht die endlichen Variationen der andern. Dabei

Das Verdienst, aus den vielen in der sphärischen Trigonometrie möglichen Relationen die vier Hauptgleichungen

$$da = \cos C db + \cos B dc + \sin B \sin c dA,$$

$$\sin B da - \cos c \sin A db = \sin c dA + \sin a \cos B dC,$$

$$\operatorname{ctg} a da - \operatorname{ctg} b db = \operatorname{ctg} A dA - \operatorname{ctg} B dB,$$

$$dA = \sin b \sin C da - \cos c dB - \cos b dC,$$

die man heute als „Fehlergleichungen“ bezeichnet, ausgewählt und in dieser Form geschrieben zu haben, gebührt Roger Boscowich.[1]) Aus ihnen folgen alle andern als Spezialfälle. Cagnoli[2]) hat für die sphärischen Dreiecke eine Tafel von 139 Proportionen zusammengestellt, die er in drei Gruppen unterschied. Die erste umfaßt die durch endliche Variationen entstandenen, die zweite jene mit unendlich kleinen Veränderungen und zwar unter Berücksichtigung des Zeichens der Variationen, die dritte endlich enthält jene Formeln, welche ohne Zeichenberücksichtigung entstehen. Jedoch sind die Hauptsätze nicht in der klaren Weise wie bei Boscowich hervorgehoben.

In einiger Beziehung zu diesen Betrachtungen stehen auch die Methoden, welche anzuwenden sind, wenn in trigonometrischen Rechnungen die Logarithmen der Sinus von Winkeln, die nahe an 90° liegen, oder die Logarithmen von Cosinus sehr kleiner Winkel vorkommen. Israel Lyons (1739—1775), Rechner beim Board of Longitude in London, schlug hierzu ein eigentümliches Verfahren vor[3]), das wir an einem der von ihm gegebenen Beispiele erläutern wollen. Ist in dem bei B rechtwinkligen sphärischen $\triangle\ ABC\ AB = c$ und $BC = a$ (klein gegen c) gegeben und soll die Hypotenuse b berechnet werden, so setzt er $b = c + \zeta$, nimmt $\cos b = \cos a \cos c = \cos (c + \zeta)$ $= \cos c - \sin c \sin \zeta - \cos c \operatorname{sinvers} \zeta$ (nach dem Additionstheorem) und erhält hieraus $\sin \zeta = \operatorname{ctg} c \operatorname{sinvers} a - \operatorname{ctg} c \operatorname{sinvers} \zeta$. Nun berechnet er nur mit Benutzung des ersten Gliedes auf der rechten Gleichungsseite einen Näherungswert für ζ und mit diesem dann als Korrektur das zweite Glied.

---

gibt er die beiden Hauptformeln $\Delta a = \cos C \Delta b + \cos B \Delta c$ und $\Delta B : \Delta C$ $= (\sin c \Delta b - \cos a \sin b \Delta c) : (\sin b \Delta c - \cos a \sin c \Delta b)$, die er aus dem Cosinussatze, bezüglich aus der Cotangentenformel erhält.

1) Opera IV, 1785 in 4°; 316—394, wo er auch die entsprechenden Formeln für ebene Dreiecke angibt (322). — 2) Trigonometria 2. Aufl. 360—378 und Memorie della Soc. Italiana VIII, 1, 214—218, vorgelegt 1798. Hier greift er die von Lorgna im vorhergehenden Bande angewandte Methode an und weist sie als unrichtig nach. Die Differentialformeln für die ebenen Dreiecke finden sich ebenda Nr. 673, 163—164 der 2. Aufl. — 3) P. T. LXV, 2, 1775, 470—484.

Anders verfuhr Lambert[1]), welcher die Gleichungen in andere brauchbarere transformierte. War z. B. aus Länge λ, Breite β und Deklination δ die Rektaszension α zu bestimmen, so hatte man zunächst die Formel: $\cos\alpha = \frac{\cos\delta\cos\lambda}{\cos\beta}$, welche Lambert für sehr kleine Bogen in die Formel $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin^2\frac{\delta}{2}\cos\lambda + \sin\frac{\lambda+\beta}{2}\sin\frac{\lambda-\beta}{2}}{\cos\beta}}$ überführte. Liegen δ, λ, β nur zwischen 1^0 und 2^0, so kann man sie sogar durch $\alpha = \sqrt{\delta^2 + \lambda^2 - \beta^2}$ ersetzen. Übrigens, sagt Lambert, kann man in solchen Fällen auch die Tafeln der natürlichen goniometrischen Funktionen mit Vorteil benützen, wenn man die darin angegebenen Cotangenten und Cosekanten zu Hilfe nimmt; so ist z. B. der $\sin 1' = \frac{1}{\operatorname{cosec} 1'} = 1 - \frac{1}{2\sec^2 1'} - \frac{1}{8\sec^4 1'} - \cdots$; hat man dann die Sekante auf 5 Dezimalen, so bekommt man hiermit (also mit Reihenentwicklung) $\sin 1'$ auf 12 Dezimalen genau.

Die Ersetzung der Cosinus- und Sinusformeln durch andere brachte auch Cagnoli in solchen Fällen in Vorschlag, und sprach allgemein das Prinzip aus, daß man am sichersten rechnet, wenn man die gesuchte Größe durch eine Tangente oder Cotangente bestimmt.[2]) So ersetzt er z. B. die von Lyons näherungsweise gelöste Gleichung $\cos b = \frac{\cos a}{\cos c}$ einfach durch $\operatorname{tg}\frac{b}{2} = \sqrt{\operatorname{tg}\frac{a+c}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{a-c}{2}}$ und ebenso $\cos B = \operatorname{tg} c \operatorname{tg} a$ durch $\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{\sin(a-c)}{\sin(a+c)}}$ u. s. w., genau wie wir es auch jetzt noch machen.

Wie wir eben sahen, hatte schon Lambert zur Berechnung der Funktionen kleiner Winkel eine Reihe verwendet. Aus demselben Gedanken entsprang eine von dem Greenwicher Astronomen Nevil Maskelyne (1732—1811) herstammende Regel, welche auch seinen Namen erhalten hat.[3]) Vernachlässigt man in den Reihen für $\sin x$ und $\cos x$ die Glieder vom 4ten Grade an, so erhält man $\sin x = x\left(1 - \frac{x^2}{6}\right)$, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2}$, oder da $\left(1 - \frac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$ mit derselben Ge-

1) Bode, Astronomisches Jahrbuch für 1778, publ. 1776. — 2) Trigonometria 1. Aufl. 250, 2. Aufl. 296. — 3) Maskelyne hat dieselbe mitgeteilt in der Einleitung zu seiner Ausgabe der Tables of Logarithms von Michael Taylor, London 1792 in 2°, Problem II p. 21—22, ohne eine Begründung zu geben. Diese gab 1804 Tralles, Abhandl. der Berliner Akad. 1804—1811, 17. Vgl. auch E. Hammer, Lehrbuch der ebenen und sphär. Trig. 2. Aufl. 1897, 169—173.

nauigkeitsgrenze gleich $1 - \frac{x^2}{6}$ ist, $\sin x = x (\cos x)^{\frac{1}{3}}$ und hieraus $\log \sin x = \log x + \frac{1}{3} \log \cos x$; genau ebenso ergibt sich $\log \operatorname{tg} x = \log x - \frac{2}{3} \log \cos x$. Selbstverständlich ist hier in $\log x$ das Arcusmaß für x zu nehmen, während in den Funktionen das Gradmaß in Anwendung kommt. Durch diese beiden Formeln sind also die Logarithmen von Sinus, Cosinus und Tangens mit einander verknüpft und zwar solange, als das erste vernachlässigte Glied $\frac{x^4}{4!}$ nicht eine halbe Einheit der letzten Dezimalstelle, die inbetracht kommen soll, erreicht. Dadurch ergibt sich z. B. für fünfstellige Tafeln als Grenze des Winkels $x = 5^0 33'$.[1]) Die Regel ist bequem zur Berechnung der Logarithmen von $\sin x$ und $\operatorname{tg} x$ innerhalb dieser Grenzen zu benützen, wenn in einer Logarithmentafel über oder unterhalb der Zahlenlogarithmen ($\log x$) die Werte von $\frac{1}{3} \log \cos x = S$ und $- \frac{2}{3} \log \cos x = T$ notiert sind, was zum erstenmal in der 7stelligen Tafel von Callet (1795), (S. 149) der Fall war. Von ihr aus gingen diese Zahlen in die neueren vollständigen Logarithmentafeln über.

Die Verfeinerung der astronomischen Beobachtungen, welche in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts schon weit vorgeschritten war, zwang die Astronomen, der Berechnung solcher sphärischer Dreiecke ihr Augenmerk zu schenken, welche sehr kleine spitze Winkel haben. Während man sie bisher gewöhnlich einfach wie ebene Dreiecke behandelt hatte, machte Joseph Jérome Lalande (1732—1807) zuerst (1763) darauf aufmerksam, daß dies nicht statthaft sei, ohne sich Fehlern auszusetzen[2]), und fand durch eine allerdings nicht ganz einwandfreie Rechnung, daß man dem ebenen Winkel B des bei A rechtwinkligen Dreiecks ABC die in Sekunden ausgedrückte Größe $\frac{1}{24} BC^2 \sin 2B (3 - \cos 2B)$ hinzufügen muß, um den entsprechenden sphärischen Winkel zu erhalten. Mit dieser Formel berechnete er eine kleine Tafel der Überschüsse des sphärischen Winkels über den ebenen und bestimmte auch die Differenz zwischen der geradlinigen und der sphärischen Hypotenuse zu $\frac{1}{8} \frac{AB^2 AC^2}{BC}$

Weit praktischer aber griff Adrien Marie Legendre[3]) (1752—1833) die Sache an, als bei Gelegenheit der Feststellung der gegen-

---

1) Bessel und Wurm haben später noch eigene Korrektionstafeln angegeben: Lindenaus Zeitschrift für Astronomie V, 1818, 57 ff. und 188—192. — 2) Mémoires de l'Académie de Paris 1763, 347—353. — 3) Professor der Mathematik, erst an der Militärschule, dann an der Normalschule, 1808 Ehrenrat der Universität etc., 1783 Mitglied der Akademie.

seitigen Lage der Greenwicher und Pariser Sternwarten[1]) die Notwendigkeit an ihn herantrat, verhältnismäßig kleine Dreiecke auf der Erdkugel zu behandeln.

In seiner berühmten Abhandlung „Sur les opérations trigonométriques, dont les résultats dépendent de la figure de la terre" 1787[2]) sprach er den nach ihm benannten Satz aus, daß ein sphärisches Dreieck, dessen Seiten gegen den Kugelradius klein sind, wie ein ebenes Dreieck mit denselben Seiten berechnet werden kann, wenn man von seinen Winkeln den dritten Teil des sphärischen Exzesses in Abzug bringt.[3]) Man weiß, welche große Bedeutung dieses Theorem in der Folgezeit gewonnen hat, obgleich Legendres Zeitgenosse Kästner den Nutzen desselben nicht einsehen konnte und heftig gegen Legendre polemisierte.[4]) Anders Lagrange! Derselbe erkannte nicht nur den Vorteil, sondern die Notwendigkeit einer solchen Berechnung darin, daß die vollen trigonometrischen Formeln für Dreiecke mit so kleinen Seiten, wie sie hier inbetracht kommen, gar keine exakte Rechnung gestatten, und gab einen kurzen und sehr übersichtlichen Beweis des schönen Theorems.[5])

§ 4. Das Lehrgebäude der Trigonometrie an der Neige des 18. Jahrhunderts.

Die vorhergehenden Paragraphen dieses Abschnittes haben uns gezeigt, wie sich die Trigonometrie in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts nach der theoretischen Seite hin vervollständigte, und wenn es auch nicht unsere Aufgabe sein kann, die pädagogische Verwertung dieser Lehren zu verfolgen, so glauben wir doch das Bild unserer Darstellung wesentlich zu vervollständigen, wenn wir einen kurzen Blick auf das Lehrgebäude unserer Wissenschaft werfen, wie es sich in den Kompendien und Unterrichtsbüchern jener Zeit darstellt, zumal wir übrigens auch hier noch verschiedenes Neue anzuführen haben werden.

In allen, auch den gelehrtesten Kompendien der damaligen Zeit mit einziger Ausnahme von Klügels „Analytischer Trigonometrie" werden die trigonometrischen Funktionen noch als Linien definiert,

1) 1787 wurde auf Betreiben Cassinis de Thury eine Kommission von französischen und englischen Gelehrten zur Ausführung dieser Arbeit gewählt, welcher auch Legendre angehörte. Näheres hierüber bei R. Wolf, H. A. II, 198. — 2) Mémoires de l'Académie de Paris 1787, 352 ff. — 3) A. a. O. 358. — 4) Geometrische Abhandlungen 2. Sammlung, Gött. 1791. — 5) In dem von uns S. 137 Anmerk. 2 angeführten Aufsatz 293—296. Legendre hat seinen Satz bewiesen in seiner Einleitung zu Delambres Méthodes analytiques pour la détérmination d'un arc de méridien. Paris 1799, Note III.

und dementsprechend wird auch der Sinus totus oder Radius r mitgeführt[1]), teilweise allerdings mit der ausgesprochenen Absicht, die in Eulers Schreibweise angesetzten Formeln homogen zu machen.[2]) Zur Vereinfachung der Formeln und Rechnungen wird dann der Radius häufig gleich 1 angenommen, so z. B. bei Karsten[3]), bei Kästner und bei Cagnoli. Eulers Bezeichnung der Funktionen findet ziemlich rasch und überall Eingang, nur bei größeren analytischen Rechnungen werden noch einzelne Buchstaben zu ihrer Darstellung verwendet.[4]) Dagegen hält sich die alte Form der Proportionen, namentlich in den Lehrsätzen, noch mit großer Zähigkeit[5]), während bei den goniometrischen Formeln allmählich die Gleichungsform zur ausschließlichen Anwendung kommt.

Die Aufstellung der Funktionen für Winkel, die den ersten Quadranten übersteigen, wird seit dem Erscheinen von Eulers „Introductio" allgemein als notwendig erkannt, geschieht aber immer noch, indem die sämtlichen Linien (auch Tangenten, Cotangenten etc.) an der Figur geometrisch gedeutet werden, daher sind Irrtümer nicht ausgeschlossen (vgl. S. 128—129), obwohl man den Zusammenhang der Funktionen, namentlich die wichtige Gleichung $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ wohl kannte. Durch die Beachtung dieses Zusammenhangs bricht sich jedoch die Erkenntnis des Richtigen allmälich Bahn, so daß man a posteriori eine Übereinstimmung mit der geometrischen Interpretation suchen kann.[6]) Auch die Funktionen negativer Argumente werden wenigstens in den umfassenderen Werken, wie bei Karsten

1) Der Radius findet sich sogar noch im 19. Jahrhundert vielfach geschrieben, so z. B. in der mir vorliegenden 14. Auflage von Legendres Éléments de Géométrie von 1832. Bruxelles 8°. — 2) So bei Antoin René Mauduit (1731—1815), der dies in seinem vorzüglichen Buche „Principes de l'Astronomie sphérique ou traité complète de trigonométrie sphérique", Paris 1765, 8°, p. 3 hervorhebt. — 3) Wenzeslaus Johann Gustav Karsten (1732—1787) hat zwei hier einschlägige Werke geschrieben: „Mathesis theoretica elem. atque sublimior", Rostock 1760, 8° und „Lehrbegriff der gesamten Mathematik" 2. Teil, 2. Aufl. Greifswald 1786, 8°. — 4) Vgl. z. B. Mauduit, der a. a. O. hie und da $\sin = s$, $\cos = c$, $\operatorname{tg} = t$, $\operatorname{ctg} = \tau$, $\sec = S$, $\operatorname{cosec} = \varsigma$, $\operatorname{sinvers} = v$ und $\operatorname{cosvers} = u$ setzt. — 5) Vgl. z. B. Legendres Éléments de géométrie, noch in der 14. Aufl. von 1832. — 6) Vgl. Segner: die schon früher zitierten „Elementa Arithmeticae Geometriae et calculi Geometrici" in neuer Auflage. Halae Magdeb. 1756; Abbé Sauri (1741—1785), „Cours complet de mathem. t. I, Paris 1774, 8° und Institutions mathém. Paris 1786, 4. Aufl. p. 206 kurzer Auszug der Trigonometrie aus dem Cours etc.; P. C. Scherffer (S. J.) Institutionum geometricarum pars sec. sive Trigonometria plana. Vindobonae 1770, 4°. Dieser bemerkt, wie später auch Cagnoli, daß beim Durchgang durch Null und durch Unendlich ein Zeichenwechsel eintreten muß.

und Legendre, in den Kreis der Betrachtung gezogen, und die Zeichen werden richtig bestimmt. Dabei ist zu bemerken, daß Legendre den Quadranten in 100° teilt.

Die Ableitung der goniometrischen Formeln vollzieht sich in den meisten Lehrbüchern immer noch in der alten Weise, d. h. es werden die einzelnen Formeln für sich geometrisch gewonnen; die Erkenntnis, daß das Additionstheorem die gemeinsame Quelle des ganzen elementaren Formelapparates ist, finden wir nur bei Simon Klügel[1]) präzis ausgesprochen (S. 136), wenn auch Legendre und Cagnoli die Hauptformeln aus ihm ableiten; der letztere hat wohl das vollständigste Formelsystem aufgestellt. Was die Ableitung des Additionstheorems selbst anlangt, so wurde sie durchweg nur für spitze Winkel vollzogen; eine rühmliche Ausnahme machte Legendre, der sie in einwandfreier Weise auf die Winkel, die den Quadranten übersteigen, ausdehnte; wir kommen darauf im folgenden Abschnitte zurück.

Aber nicht nur diese elementaren Formeln wurden in die Lehrbücher aufgenommen, sondern die größeren Kompendien umfaßten auch damals schon die trigonometrischen und zyklometrischen Reihen und den Satz von Moivre, mehr oder weniger streng abgeleitet. So hatte Louis Bertrand (1731—1812), ein Schüler Eulers, in sein zweibändiges Werk „Développement nouveau de la partie élémentaire des mathématiques“. Genève II, 1778, 4° alle nur entfernt auf die Trigonometrie bezüglichen Entdeckungen Eulers aus der „Introductio“ aufgenommen, ja selbst die Produktzerlegung der Funktionen und den Satz von Cotes. Ähnlich verfuhren Mauduit und Karsten, wenn auch mit größerer Beschränkung, und Cagnoli bediente sich sogar der Differentialrechnung zu seinen Ableitungen und schickte ihre Prinzipien in einem eigenen Kapitel voraus. Nicht minder zogen diese Schriftsteller die Teilungsgleichungen in den Kreis ihrer Betrachtungen.

Die Berechnung des rechtwinkligen ebenen Dreiecks hatte, Dank der beständigen Beibehaltung des Sinus totus,[2]) seit Rhäticus keine merklichen Fortschritte gemacht, und die Auflösungsmethoden der schiefwinkligen Dreiecke in der Ebene blieben im großen und und ganzen dieselben, wie am Anfang des Jahrhunderts, nur wurde

1) Analyt. Trig. 35. — 2) Vgl. La Caille und Sauri in ihren schon angeführten Schriften, Étienne Bézout (1730—1783) in seinem Cours de mathématiques. Paris II. Teil 1772. Scherffer a. a. O., Joh. Friedr. Lorenz, „Die Elemente der Mathematik“ 1785, I. Tl. und selbst Georg von Vega in seinem „Thesaurus“ von 1794 und in seinen „Vorlesungen über die Mathematik“ II. Band 1784 und noch viele andere.

ihre Handhabung leichter und eleganter durch den Gebrauch der Formeln. Übrigens erschienen auch diese selbst bei Cagnoli noch in komplizierter Gestalt, indem er, wie die meisten seiner Zeitgenossen, Eulers einfache Seitenbezeichnung auffallenderweise nicht benützte. Eine rühmliche Ausnahme hiervon machten Kästner[1]) und Klügel, während selbst Louis Bertrand noch die schwerfälligere Bezeichnung beibehielt.[2]) Daß die sämtlichen Sätze zur Berechnung der ebenen Dreiecke, wie wir sie jetzt benützen, damals im Gebrauch waren, brauchen wir kaum hervorzuheben; in ihrer Gesamtheit selbst mit Einschluß der Mollweideschen Gleichungen[3]) zusammengestellt und ganz ebenso abgeleitet, wie wir es heute noch machen, finden sie sich jedoch nur in Cagnolis Trigonometrie.

In der sphärischen Trigonometrie waren in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts verschiedene Bezeichnungsweisen der Dreiecke im Gebrauch und nur ganz allmählich wurden sie alle durch die Eulersche verdrängt. Lamberts Bezeichnungsweise des rechtwinkligen und schiefwinkligen Dreiecks haben wir schon S. 133 und 132 erwähnt, in der Bezeichnung des letztern schloß sich ihm unter andern auch Vega an[4]), während dieser das rechtwinklige Dreieck, wie in Fig. 31 benennt. Segners Benennung der Stücke des rechtwinkligen sphärischen Dreiecks, die sehr viel gebraucht wurde[5]) und sich lange Zeit erhielt, haben wir ebenfalls schon (S. 128) angeführt. Ähnlich war seine Bezeichnungsweise des schiefwinkligen Dreiecks, welche wir durch Fig. 32 darstellen, während Vega die in dieser Figur vorkommenden Buchstaben durch folgende ersetzt: M, T, m nach der Reihe durch c, a, b, ferner H und h durch B und C, B und b durch M und N und die Seite Mm durch A, womit er sich an Lambert

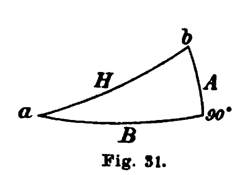


Fig. 31.

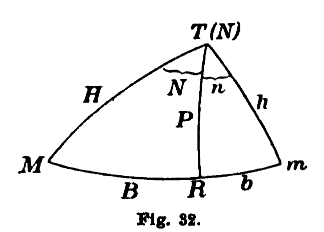


Fig. 32.

1) „Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie" in den spätern Auflagen, z. B. in der 6. von 1800, sowie in seinen „Geometrischen Abhandlungen". (Siehe S. 138.) — 2) Siehe z. B. a. a. O. t. II, p. 403. — 3) Schon in der ersten Auflage von 1786, 122 stehen diese Gleichungen aus dem Sinussatz abgeleitet; übrigens finden sich dieselben auch in Mauduits Principes d'Astronomie sphérique p. 83 und 84 ohne Beweis aus den Neperschen Analogieen der sphärischen Trigonometrie geschlossen. — 4) Im Thesaurus logarithmorum 1794, wo er auch das Quadrantendreieck zeichnet und seine Stücke durch Vertauschung der großen mit den kleinen Buchstaben in Fig. 31 markiert; desgleichen noch in dem Logarithmisch-trigonometrischen Handbuch von 1811. — 5) Z. B. von De la Caille, von Karsten, von Sauri etc.

anlehnt. Die Winkel werden fast durchweg mit den an den Ecken stehenden großen Buchstaben geschrieben, während wir die kleinen Buchstaben des griechischen Alphabetes, deren sich Lagrange mit Vorliebe in seinen Abhandlungen bediente[1]), in den Lehrbüchern nirgends finden.

Bezüglich der Behandlung der sphärischen Trigonometrie muß man die graphischen und rechnerischen Methoden auseinanderhalten. Die ersteren waren seit den Arbeiten von Boscowich (S. 91 und 99) wieder neu zu Ehren gekommen, beruhten natürlich in der Hauptsache auf dem Analemma und wurden zu näherungsweisen Auflösungen der sphärischen Aufgaben, vereinzelt, wie von Mauduit[2]), auch zur Ableitung der trigonometrischen Hauptsätze verwendet. Die ausführlichste Schrift, welche ohne Kenntnis des Jahrhunderte alten Analemmas wieder alles längst Dagewesene von Neuem findet, dürfte Siméon Valettes „Trigonométrie sphérique résolue par le moyen de la Règle et du Compas", Paris 1757, sein. Das gut geschriebene, wenn auch etwas breite Werkchen baut unmittelbar auf Boscowich auf, der jedoch nirgends genannt wird.[3])

Die rechnerische Behandlung der sphärischen Trigonometrie, welche die Lehrbücher fast ausschließlich brachten, wurde auch damals noch immer im Gegensatze zu Eulers Behandlung im 2. Aufsatze[4]) in der Weise entwickelt, daß zuerst die Sätze für das rechtwinklige und dann jene für das schiefwinklige Dreieck gebracht wurden. Gewöhnlich leitete man dann den Sinussatz und die Tangentenregel des rechtwinkligen Dreiecks: $\sin\text{tot} : \sin H = \sin B : \sin N$ und $\sin\text{tot} : \sin B = \text{tg}\, M : \text{tg}\, P$ (vgl. Fig. 32 auf S. 162) aus dem Dreikant ab und aus diesen beiden Formeln die übrigen mit der Methode der komplementären Dreiecke oder der Figur der „Bischofsmütze"[5]), oder man gewann sie alle 6 aus dem Dreikant, das auch, wie bei Oppel aufgeklappt wurde.[6])

1) Siehe z. B. die S. 126 Anm. 1 angeführte Schrift. — 2) In seinen Principes de l' Astronomie sphérique p. 65 ff.; Mauduits Methode stimmt mit jener des Boscowich überein. Später hat Boscowichs Methode Gioachimo Pessuti wieder aufgenommen, indem er an derselben Figur wie jener die Hauptformeln graphisch entwickelte. Memorie della Società Italiana XV, 1811, Pars I, 197, datiert 1810. — 3) Eine ähnliche Arbeit lieferte der Abbé Caluso in Mém. de l'Acad. de Turin II, 1786. — 4) Siehe S. 122. — 5) Diese Figur, die wir z. B. bei Torporley (I. Tl. S. 184) fanden, wird bei Bézout, Cours de mathém. 1772 II. Tl. benützt; Cagnoli und andere verwenden die einfachere Fig. 33, in welcher BF und BE Quadranten sind; wir haben diese Methode als die der komplementären Dreiecke bezeichnet. — 6) Z. B. bei Segner a. a. O. 318 ff. Erwähnt mag noch werden,

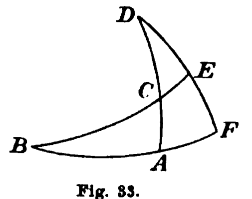


Fig. 33.

Die Behandlung der schiefwinkligen Dreiecke wird auf sehr verschiedene Art vollzogen. Einige Kompendien begnügen sich damit, die Dreiecke durch einen senkrechten Bogen in zwei rechtwinklige zu spalten und die durch Elimination der gemeinsamen Höhe aus den Formeln für das rechtwinklige Dreieck entstehenden Proportionen zur Lösung zu benützen. So leitet z. B. Segner und nach ihm Sauri auf diese Weise die folgenden fünf Gleichungen ab:[1])

$$1)\ \sin H : \sin h = \sin m : \sin M;\quad 2)\ \sin B : \sin b = \operatorname{ctg} M : \operatorname{ctg} m;$$

$$3)\ \sin N : \sin n = \cos M : \cos m;\quad 4)\ \cos N : \cos n = \operatorname{ctg} H : \operatorname{tg} h;$$

$$5)\ \cos B : \cos b = \cos H : \cos h,$$

und fügt ihnen noch die beiden durch korrespondierende Addition und Subtraktion aus 3) und 5) hervorgehenden Formeln bei, die wir schon bei dem Engländer Thomas Baker im 17. Jahrhundert trafen (S. 48, die beiden letzten Gleichungen). Diese 7 Formeln genügen, um alle Dreiecksfälle zu behandeln, und deshalb werden dann sehr häufig auch keine andern mehr aufgestellt. Diese Methode der Behandlung war gegen Ende des 18. Jahrhunderts sehr verbreitet, da sie z. B. in den vielgelesenen Büchern von Segner, Karsten und Lorenz in Deutschland, von Sauri, Bézout, De la Caille und anderen in Frankreich ausschließlich gelehrt wurde. Damit ist jedoch nicht gesagt, daß nicht andere Autoren neben dieser Methode, die sie so ziemlich alle brachten, auch noch die allgemeinen Formeln für das schiefwinklige Dreieck entwickelten.[2]) Gewöhnlich wurden dieselben aus dem Dreikant abgeleitet, wenigstens der Sinus- und Cosinussatz, und aus diesen dann die übrigen durch Rechnung gewonnen, Cagnoli und Karsten finden sie dagegen, wie man es häufig auch jetzt noch macht, durch Anwendung der Sätze des rechtwinkligen Dreiecks, während sie Mauduit teilweise durch diese Methode, teilweise aus dem Analemma (Orthogonalprojektion) erhält. Die letzteren beiden Schriftsteller entwickeln auch die Neperschen Analogieen[3]) und

---

daß Cagnoli auch schon Betrachtungen darüber anstellte, inwieweit diese Formeln bei kleinen Winkeln für die Berechnung brauchbar sind, und sie für diese Fälle durch andere ersetzte, 1. Aufl. 250, 2. Aufl. 296 ff.

1) Auch die früher erwähnten Schriftsteller G. Rondelli und Boscowich haben sich dieser Formeln bedient. — 2) Vgl. z. B. J. Lalande in seiner vorzüglichen Astronomie III, 1792, Chap. 23. — 3) Cagnoli löst unter anderen die Aufgabe, aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel die übrigen Stücke zu bestimmen, und ihre polare mit den Neperschen Gleichungen 1. Aufl. 267, 2. Aufl. 312, und Mauduit zeigt in einer eigenen Tafel (86), wie man mittelst derselben die 6 Dreiecksfälle behandeln kann, dabei macht er die Bemerkung, es sei zu verwundern, daß die meisten Schriftsteller über Trigonometrie diese Formeln nicht erwähnen.

zeigen ihren Gebrauch; im übrigen werden dieselben bei den wenigsten Autoren angetroffen. Das Verfahren, mit Hilfe des Polardreiecks das Formelsystem direkt zu verdoppeln, das schon Vieta gekannt hat (siehe I. Tl. S. 180), finden wir nirgends ausschließlich angewendet, trotzdem die Eigenschaft des Polardreiecks natürlich wohlbekannt war und auch vereinzelt benützt wurde.[1])

Um unser Bild zu vervollständigen, müssen wir noch eines Verfahrens gedenken, das damals vielfach angewendet wurde, um die Formeln der ebenen Trigonometrie direkt aus denen der sphärischen zu erhalten. Man dachte sich den Radius der Kugel unendlich groß und ersetzte die Sinus und Tangenten der Seiten, welche ausschließlich in die Formeln eingeführt wurden, durch ihre Bögen. So gewann z. B. Mauduit aus den Neperschen Analogieen die sogenannten Mollweideschen Gleichungen (p. 83—84 a. a. O.).[2])

Wenn wir im Vorhergehenden die hauptsächlichsten Methoden und Darstellungsweisen der trigonometrischen Lehren geschildert haben, so erübrigt uns noch der am Ende des Jahrhunderts auftretenden Versuche zu gedenken, welche dahin zielten, das ganze trigonometrische Lehrgebäude auf eine möglichst einfache Grundlage zu stützen. Ohne diese bestimmte Absicht auszusprechen, hatte schon Kästner[3]) die Hauptformeln der ebenen Trigonometrie rechnerisch aus dem Sinussatze und der Winkelbeziehung $A + B + C = 180^0$ abgeleitet, und noch früher hatte Oppel gezeigt, daß sich aus der Kenntnis des Sinus- und Cosinussatzes die sämtlichen Formeln der sphärischen Trigonometrie gewinnen lassen, und da man, wie oben bemerkt, die ebene Trigonometrie als einen Spezialfall der sphärischen auffassen konnte, so war hiermit das ganze Gebäude auf diesen beiden Sätzen fundiert. Damit nicht zufrieden, suchte der uns schon bekannte Abbé de Gua zu zeigen, daß die Cosinusformel allein zu diesem Aufbau genüge. In einer 1783 der Pariser Akademie vorgelegten Abhandlung[4]) „Trigonométrie sphérique déduite très brievement et complètement de la seule solution algébrique du plus simple des ses problèmes généraux etc.“ führt er diesen Gedanken,

---

1) Gewöhnlich zur Ableitung des Halbseitensatzes aus dem Halbwinkelsatz, so bei Mauduit 73. — 2) Auch Lagrange verbreitet sich hierüber in seiner Solution de quelques problèmes relatifs aux triangles sphériques, Journal de l'École Polyt. cah. 6, 1799, sagt aber ganz richtig, daß diese Ableitung das Einfachere aus dem Schwierigeren zu gewinnen heiße (293). — 3) Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie und Trigonometrie, z. B. 3. Aufl. 1774, 418; 4. Aufl. 1786, 505. Kästner wollte eigentlich nur eine „Vergleichung der Seiten des Dreiecks und eines seiner Winkel“ finden. — 4) Erschienen in Mémoires de l'Académie de Paris 1786, 291—343.

den übrigens schon der Petersburger Akademiker Maier ausgesprochen hatte (S. 96), wie De Gua selbst bemerkt, des Nähern aus. Dabei hat er die unglückliche Idee, für seine neu aufgebaute Trigonometrie auch eine neue Funktionsbezeichnung einzuführen, die an Schwerfälligkeit alles Dagewesene übertrifft und so die Lektüre seiner sonst verdienstlichen Abhandlung sehr erschwert.[1]) Der Gang, den er in derselben einschlägt, ist folgender. Er leitet zunächst geometrisch den Cosinussatz ab[2]) $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$, löst ihn nach $\cos A$ auf und berechnet hieraus $\sin A$, welches er in die Gestalt bringt

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c} : \sin b \sin c.$$

Aus dieser Form sieht man, daß die Zähler für $\sin B$ und $\sin C$ dieselben sein müssen wie der für $\sin A$, also hat man

$$\sin A : \sin B : \sin C = \frac{1}{\sin b \sin c} : \frac{1}{\sin c \sin a} : \frac{1}{\sin a \sin b} = \sin a : \sin b : \sin c,$$

womit der Sinussatz gefunden ist. Durch sehr umfangreiche Rechnungen, die wir hier nicht mitteilen können, ergeben sich dann der Cosinussatz für die Winkel, die Cotangentenformel und noch andere sehr komplizierte Gleichungen, zehn an der Zahl, welche teilweise zu praktischer Verwendung wenig brauchbar sind.

Die abschreckenden Rechnungen De Guas veranlaßten Lagrange in dem schon wiederholt erwähnten Aufsatze von 1798/99 „De quelques Problèmes relatifs aux Triangles sphériques, avec une analyse complète de ces Triangles“ eine einfachere Ableitung zu geben. Er bedient sich ganz der Eulerschen Bezeichnungsweise, geht wie De Gua von dem Cosinussatze aus, den er wie jener für Winkel $< 90^0$ ableitet, und erhält aus ihm den Sinussatz. Indem er dann die Cosinusformel für die Seiten a und c ansetzt, mit Hilfe der letzteren $\cos c$ aus der ersteren eliminiert und $\sin c = \frac{\sin a \sin C}{\sin A}$ einführt, ergibt sich als dritte Gleichung

$$\operatorname{ctg} a \sin b = \operatorname{ctg} A \sin C + \cos b \cos C,$$

d. h. die Cotangentenformel Vietas (I. Tl. S. 182). Vor der eben erwähnten Einführung des Wertes von $\sin c$ hatte sich die von Euler

1) Indem er nämlich das Dreieck mit GSP bezeichnet, schreibt er für $\cos S = S$, $\cos P = P$, $\cos G = G$, bezeichnet die Sinus derselben Winkel mit Σ, Π, Γ, die Cosinus der Gegenseiten mit s, p, g, die Sinus mit σ, π, γ, die Cotangenten der Winkel mit $\lrcorner S$ u. s. w., die Tangenten mit $\lrcorner \Sigma$ u. s. w., die Cotangenten der Seiten mit $\lrcorner s$ u. s. w. und die Tangenten mit $\lrcorner \sigma$ u. s. w, Zur Bezeichnung der Sekanten und Cosekanten endlich wird das Zeichen $\ulcorner$ vorgesetzt. — 2) Indem er sich derselben Figur bedient, die schon Fr. Blake (S. 126 Anm. 1) zur Berechnung sphärischer Dreiecke anwandte.

zuerst gefundene Gleichung ergeben: $\cos a \sin b = \cos b \sin a \cos C + \sin c \cos A$; indem er in dieser a mit b und folglich auch A mit B vertauscht und den hierdurch erhaltenen Ausdruck für $\cos b \sin a$ in sie einführt, ergibt sich leicht mit Hilfe der Relation $\sin c = \frac{\sin b \sin C}{\sin B}$ der Cosinussatz für die Winkel als vierte Hauptgleichung. Diese vier Gleichungen genügen, wie Lagrange anführt, um alle Aufgaben zu lösen, die sich auf sphärische Dreiecke beziehen, können aber noch durch andere, welche für logarithmische Rechnung verwendbarer sind, ersetzt werden. So ergeben sich zunächst aus ihnen für $A = 90^0$ die bekannten sechs Formeln des sphärischen rechtwinkligen Dreiecks. Dann findet Lagrange den Halbwinkelsatz, wie wir ihn jetzt noch ableiten, macht den Cosinussatz durch Einführung eines Hilfswinkels logarithmisch, desgleichen die Cotangentenformel und leitet den Satz zur Bestimmung der halben Seiten aus den drei Winkeln aus seinem polaren mittelst des Supplementardreiecks ab und verschafft sich zwei der vier Neperschen Gleichungen mit Hilfe des Halbwinkelsatzes, während die andern beiden sich aus dem Polardreieck ergeben.

Es besteht kein Zweifel, daß dieses von Lagrange aufgestellte System der sphärischen Trigonometrie an Übersichtlichkeit, Einfachheit und Eleganz alle bis dahin erschienenen übertrifft und so in würdiger Weise die Bestrebungen des 18. Jahrhunderts auf dem Gebiete unserer Wissenschaft abschließt. Da Lagranges Arbeit unmittelbar an De Gua anschließt, mußten wir beide nacheinander besprechen und können erst nachträglich noch auf eine Abhandlung von Theodor Schubert hinweisen, die aus dem Jahre 1796 stammt[1]) und sich die Aufgabe stellt, aus dem Satze von Menelaus allein das ganze bekannte Formelsystem der Trigonometrie auf der Kugel abzuleiten. Schubert leitet zunächst aus dem Haupttheorem (I. Tl., S. 16) mit der Methode der komplementären Dreiecke, wie wir dies früher (I. Tl. S. 24—25) andeuteten, die sechs Formeln für das rechtwinklige Dreieck ab, dann den Sinussatz für das schiefwinklige und unter beständiger Anwendung der erhaltenen Formeln auf die Figur des Transversalensatzes[2]) die beiden Cosinusregeln, aus denen sich dann als einzige noch notwendige Gleichungen

$$\operatorname{tg} C = \frac{\sin A \sin c}{\sin b \cos c - \cos b \sin c \cos A}$$

---

1) Trigonometria sferica e Ptolemaeo (22. Dez. 1796 vorgelegt, 1801 publiziert). Nova Acta Acad. Petrop. XII. — 2) Und zwar werden die Seiten BA, CA und CB des schiefwinkligen $\triangle\, ABC$ zu Quadranten BF, CD und CE ergänzt und es wird Bogen EDF gezogen.

und deren Polarformel ergeben. Die Rechnungen sind jedoch zu umfangreich und kompliziert, als daß wir sie hier mitteilen könnten. Schuberts System steht ohne Zweifel dem Lagranges an Eleganz und Einfachheit nach, wenn es auch demselben Gedanken entsprungen ist, auf einen Satz das ganze Gebäude zu begründen.

Hatte uns das vorhergehende Kapitel die umfassende Tätigkeit Eulers im Zusammenhange vorgeführt, so bot uns das eben vollendete ein Bild der Arbeit seiner Zeitgenossen und nächsten Nachfolger. Von diesen trat uns namentlich die Gestalt Lamberts bedeutungsvoll entgegen. Wie Euler hatte auch er die Darstellung der trigonometrischen Funktionen als Verhältnisse gebraucht, während allerdings erst Klügel eine exakte Definition dafür gab; ferner verwandte er die von Riccati gefundenen Hyperbelfunktionen zu trigonometrischen Rechnungen, gab, wenn auch unbewußt, einen auf gruppentheoretischer Grundlage beruhenden Beweis der Neperschen Regel, förderte durch einen exakten Beweis für die Irrationalität von π das Quadraturproblem und durch Herstellung einer äußerst gediegenen Tafelsammlung die praktischen Rechnungen. Klügel hob zuerst die zentrale Stellung des Additionstheorems in der Goniometrie hervor, während Eulers Schüler Lexell und N. Fuß, ferner Schubert, Kästner, L'Huilier und andere durch gewandte Handhabung der neuen Formelrechnung das Gebiet der Trigonometrie wesentlich vermehrten. Auf der Basis von Lamberts Arbeiten schufen dann Lexell und L'Huilier die Polygonometrie in der Ebene und im Raume und letzterer stellte auch noch den Hauptsatz der Polyedrometrie auf. In dem Riesenunternehmen der Herstellung der Tables de Cadastre wurde seit Briggs und Vlack zum erstenmal wieder eine Neuberechnung der Logarithmen und zwar mit Benützung der Reihen und der Interpolation geleistet, Maskelynes Regel gab ein Mittel zur bequemen Bestimmung der Funktionen kleiner Winkel, Legendres berühmter Satz ein solches zur angenäherten Berechnung kleiner sphärischer Dreiecke, und Cotes' Schöpfung einer Differentialtrigonometrie wurde durch Boscowich und andere ausgebaut. Endlich war es auf Grund der namentlich durch Lagrange zu vollendeter Eleganz geführten Rechnung möglich, die Trigonometrie auf einer einzigen Fundamentalformel aufzubauen.

6. Kapitel.

Die Trigonometrie im 19. Jahrhundert.

§ 1. Versuche, die Goniometrie und ebene Trigonometrie in allgemeinster Weise zu begründen.

Die Ausbildung der analytischen Methoden, wie sie von den großen Mathematikern des 18. Jahrhunderts in rastloser Arbeit erzielt worden war, und die enormen Erfolge der Rechnung auf allen Gebieten der theoretischen und angewandten Mathematik hatten eine große Vorliebe für diese Methoden verursacht, welche die Geometrie etwas in den Hintergrund drängten. Darin lag auch der Grund für das von uns im letzten Kapitel geschilderte Bestreben, das ganze trigonometrische System nur aus einer einzigen geometrisch gewonnenen Formel analytisch zu entwickeln. Andererseits aber war der Begriff der goniometrischen Funktionen aus rein geometrischer Anschauung hervorgegangen, und ihre Darstellung als Linien erhielt sich trotz Euler, Lambert, Klügel und andern noch bis zur Mitte des 19. Jahrhunderts und teilweise darüber hinaus. Um daher ihre analytischen Eigenschaften, wie die Periodizität, geometrisch verfolgen und die Rechnungsresultate richtig interpretieren zu können, sah man sich gezwungen, die Darstellung der positiven und negativen Rechnungsgrößen einer genauen Betrachtung zu unterziehen. Zwar hatte sich schon D'Alembert damit beschäftigt, doch war seine Auslegung nicht in allen Fällen stichhaltig, und Carnot[1]) suchte daher in seinem 1801 veröffentlichten Buche „De la corrélation des figures de Géométrie" und in seiner „Géométrie de position" 1803 neue Gesichtspunkte aufzustellen. Im speziellen wandte er seine Theorie der inversen Größen und der korrelativen Systeme zur Bestimmung der Zeichen der trigonometrischen Linien in den verschiedenen Quadranten an[2]), wodurch es ihm zum erstenmal gelang, eine einwandfreie geometrische Darstellung dieser Verhältnisse zu schaffen. Betrachten wir seine Methode etwas näher. Ist $\widehat{AB}$ ein Bogen des ersten Quadranten, und sind BD, BE, AH, FG, wie die Fig. 34 (s. S. 170) zeigt, gezeichnet, so bilden diese geometrischen Größen ein gegebenes System; konstruiert man für irgend einen andern Punkt B' wieder

---

1) Lazare Nicolas Marguerite Carnot (1753—1823), erst Ingenieur-Kapitän, später Kriegsminister, unter Napoleon Kommandant von Antwerpen, dann verbannt. Seine Biographie in Oeuvres d'Arago I. — 2) Correlation Problème I, 57—84, Géométrie de position Sect. II, Probl. VI, 126—150.

dieselben Größen, so bilden sie ein zum ersten korrelatives System. Diejenigen Linien, welche beim Übergang von B nach B' nicht durch Null oder Unendlich hindurchgehen, sind natürlich keinem Zeichenwechsel unterworfen, sind nicht invers, sie brauchen also nicht weiter betrachtet zu werden; dagegen heißen diejenigen invers und bei ihnen tritt ein Zeichenwechsel ein, welche als eine Differenz dargestellt, in die umgekehrte Differenz des korrelativen Systems übergehen. Ist z. B. B' im zweiten Quadranten gelegen, so ist das zu $\widehat{BF}$, BE, CD, FE, AH, FG korrelative System: $\widehat{B'F}$, $B'E'$, CD', FE', AH', FG'. Nun ist $\widehat{BF} = \widehat{AF} - \widehat{AB}$, $\widehat{B'F} = \widehat{AB'} - \widehat{AF}$, also $\widehat{B'F}$ invers zu $\widehat{BF}$, daher negativ, wenn $\widehat{BF}$ positiv vorausgesetzt wird. Ebenso ist $BE = DC = AC - AD$, $B'E' = D'C = AD' - AC$, also $B'E'$ invers zu BE, daher negativ, wenn ersteres als positiv gilt. Das gleiche gilt von CD'; ferner ist $FE = FF' - EF'$ und $FE' = FF' - E'F'$, also sind beide nicht invers. Weiter ist $AH = AK - HK$, wo K ein beliebiger Punkt von AH über H hinaus

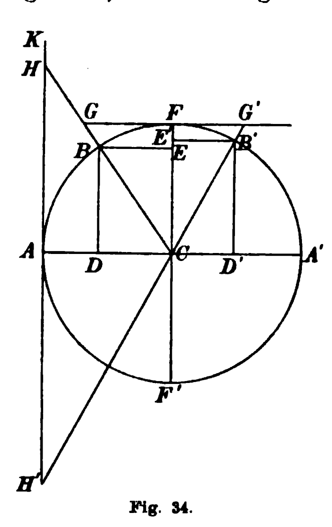


Fig. 34.

ist; aber $AH' = KH' - AK$, also AH' invers zu AH; oder auch aus den ähnlichen Dreiecken ACH' und $E'B'C$ folgt: $AH' = (AC \cdot E'C) : E'B'$, und da hier allein $E'B'$ invers ist, so ist es auch AH', ebenso bestimmt sich auch das Zeichen von FG' als negativ, und endlich folgt aus derselben Ähnlichkeit $CH' = (AC \cdot B'C) : E'B'$, also da $E'B'$ allein invers ist, auch CH' invers zu CH. Indem man noch CG' als nicht invers zu CG erkennt, hat man die Zeichen sämtlicher sechs Funktionen im zweiten Quadranten bestimmt. Betrachtet man ebenso die durch die nämliche Konstruktion für die Punkte B'' und B''' im dritten, respektive vierten Quadranten entstehenden Liniensysteme bezüglich als korrelativ zu denen des zweiten und dritten Quadranten, so gelingt es in der Tat, die sämtlichen Zeichen der Funktionen geometrisch exakt zu bestimmen, was unter D'Alemberts Annahme, daß entgegengesetzt gerichtete Linien verschiedenes Zeichen haben, nicht möglich ist, weshalb man, wie wir wissen, seit Segner nur die Zeichen von Sinus und Cosinus direkt aus der Figur bestimmte. Auch den Zeichen der Funktionen negativer Winkel wird Carnot gerecht, indem er den Punkt B den Kreis in entgegengesetzter Weise durchlaufen läßt und seine

Theorie der korrelativen Systeme anwendet. Zum Schlusse stellt er die so erhaltenen Resultate in einer Tabelle (p. 143) zusammen, die er später (p. 246—247) noch auf Winkel, welche 2π übersteigen, erweitert.

Dieser Methode der inversen Größen bedient sich Carnot auch, um zum erstenmal die allgemeine Gültigkeit der Additionsformeln nachzuweisen[1]), die wie er (p. 160) ausdrücklich bemerkt, alle trigonometrischen Formeln in sich schließen. Zu diesem Zwecke nimmt er den Durchmesser des Kreises als Einheit, wodurch die Sehne eines Bogens direkt gleich dem Sinus des auf ihm stehenden Peripheriewinkels wird; sind dann in Fig. 35 $\sphericalangle BAD = m$, $\sphericalangle DAC = n$ ($m > n$, und vorerst $m + n < 90^0$) zwei an die Gerade AD angelegte Winkel, wird in einem beliebigen Punkte E von AD eine Senkrechte BEC auf sie errichtet und um das entstehende Dreieck ABC der Kreis beschrieben, der AE in D schneidet und den Durchmesser 1 hat, wird ferner $EF = EC$ gemacht und $EH = ED$ und DF gezogen, so hat man $BD = \sin m$, $CD = \sin n$, $AC = \cos m$, $AB = \cos n$, ferner ist $BC = \sin(m + n)$, $AD = \cos(m - n)$, $BF = \sin(m - n)$, $AH = \cos(m + n)$, und die Additionsformeln ergeben sich leicht aus den Beziehungen der Figur. Betrachtet man dann die in diese Formeln eintretenden Größen als Werte eines Korrelationssystems, sucht die Korrelationswerte für irgend einen anderen Zustand des Systems und setzt sie in die Formeln ein, so kann man diese damit auf alle Winkel ausdehnen. Bewegt sich z. B. BC parallel zu sich selbst von A weg und AD gleichzeitig parallel zu sich vom Zentrum weg, bis Punkt E außerhalb des Kreises fällt, dann wird $\sphericalangle CAD = n$ invers, indem er durch Null hindurchging, als sich E auf dem Kreise befand: man hatte ja im ersten Systeme $\sphericalangle CAE = \sphericalangle CAB - \sphericalangle BAE$, im zweiten aber $\sphericalangle CAE = \sphericalangle BAE - \sphericalangle CAE$, also ist in den Formeln das Zeichen von $\sphericalangle n$ zu ändern. Carnot bemerkt, daß es im ganzen acht korrelative Systeme gibt, die sich aber auf vier reduzieren lassen und die allgemeine Begründung der Additionsformeln enthalten. Auch gibt er noch eine zweite Ableitung dieses wichtigen Theorems mit Hilfe des Ptolemäischen Satzes vom Sehnenviereck (p. 95 und 169).[2]) Aus

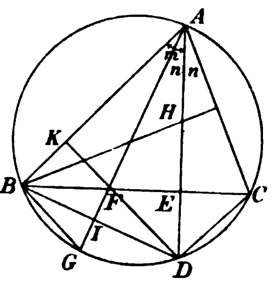


Fig. 35.

1) Corrél. Probl. II, 84 ff. Géométrie de position, Sect. II, probl. VII, p. 151 ff. Später fast in derselben Weise, wahrscheinlich ohne Kenntnis von Carnots Werk von Schmeißer, Journal für Mathematik X, 1833, 129 ff. begründet. —
2) Dasselbe hat später (1854), jedenfalls ohne Carnot zu kennen, wieder Quidde getan, Archiv für Math. XXIII, 238.

den vielen Folgerungen, die Carnot aus diesem Theorem zieht[1]), wollen wir nur noch die allgemeinen Formeln hervorheben:

$$\frac{\sin(a-b)}{\cos a \cos b} + \frac{\sin(b-c)}{\cos b \cos c} + \cdots + \frac{\sin(p-a)}{\cos p \cos a} = 0$$

und

$$\frac{\sin(a-b)}{\sin a \sin b} + \frac{\sin(b-c)}{\sin b \sin c} + \cdots + \frac{\sin(p-a)}{\sin p \sin a} = 0.$$

R. Baltzer hat die letztere später für den Fall von vier Winkeln aus dem allgemein begründeten Sinussatze abgeleitet und dann aus ihr umgekehrt die Additionsformeln gewonnen.[2])

Zu diesen wichtigen Untersuchungen über die Goniometrie fügte Carnot auch noch die Begründung der ebenen Trigonometrie auf die einzige Formel des Projektionssatzes hinzu.[3]) In der Veröffentlichung war ihm allerdings schon Charles Bossut (1730—1814) in seinem Cours de Mathématiques (II, 1800, 413—416) zuvorgekommen. Indem sie nämlich in $\triangle ABC$ die Höhe AD fällten, ergab sich: $BD = c \cos B$, ebenso $CD = b \cos C$, woraus der Projektionssatz $a = b \cos C + c \cos B$ folgt; schreibt man diesen auch für die Seiten b und c an, multipliziert die drei Gleichungen nacheinander bezüglich mit a, b und c und zieht die erste von der Summe der beiden andern ab, so erhält man $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$; daraus folgt dann $\sin A = \frac{K}{2bc}$, $K = \sqrt{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - (a^4 + b^4 + c^4)}$ und ebenso $\sin B = \frac{K}{2ca}$, $\sin C = \frac{K}{2ab}$, woraus sich $\sin A : \sin B : \sin C = a : b : c$ ergibt.[4]) Auch zeigen Bossut und Carnot noch, wie der

1) Er entwickelt aus ihm analytisch alle wichtigen Formeln der Goniometrie. — 2) Die Elemente der Mathematik II, 5. Aufl. 1878, 301—303. Dieselben Formeln findet Carnot auch geometrisch in Nr. 215, 216 p. 273—275. — 3) A. a. O. Nr. 251, 252 p. 302—303 und Corrélation etc. Probl. III, 101—117, auch schon in einem Briefe an Bossut von 1799, vgl. dessen Cours II, Anhang 413—415. — 4) Gergonne hat diese Rechnung etwas umgestaltet: Annales de Mathém. III, 1812, 348. Vgl. auch Matzka in seiner Ausgabe von Vegas Vorlesungen, Wien 1835, II, § 557 und etwas verändert im Archiv für Mathem. XIII 1849, 75. Vgl. ferner Rädell ebenda I, 1841, 444, August in seinen logarithmisch-trigonometrischen Tafeln 1846 und neuerdings Dickmann im Jahresbericht des Essener Gymnasiums 1877, sowie in der Zeitschrift für mathem. und naturwissenschaftlichen Unterricht XX 1889. Eine direkte Ableitung des Sinussatzes aus dem Cosinussatze hat schon Lagrange in der mehrfach zitierten Abhandlung von 1798 gegeben, dann Reynaud in seiner Trigonométrie, Paris 1805 und Legendre a. a. O. Nr. XLVI, während O. Terquem den Cosinussatz aus dem Sinussatze ableitete: Nouv. Ann. 1847, VI, 34. Den Sinussatz und den Projektionssatz wählten als Grundlage B. F. Thibaut, Grundriß der reinen Mathematik 5. Aufl. 1831, 370 und O. Schlömilch, Grundzüge einer wissenschaftlichen Darstellung der Geometrie des Maßes 1849; 6. Aufl. 1883. Eine

Projektionssatz unmittelbar die Additionsformeln liefert, wenn man sich auf Winkel $< 90^0$ beschränkt.

Der Italiener Pietro Ferroni (1744—1825), den wir schon antrafen und auf den wir weiter unten wieder zu sprechen kommen, hat 1805[1]) denselben Projektionssatz zur Begründung der Raumtrigonometrie verwendet und die Trigonometrie der Ebene als einen Spezialfall aus ihr abgeleitet.

Carnots Methode der inversen Größen scheint übrigens merkwürdigerweise wenig Beifall gefunden zu haben, denn es finden sich nach ihm zahlreiche Versuche, sowohl die Zeichen der Funktionen zu bestimmen, als auch die Trigonometrie zu begründen, die nicht auf ihn rekurrieren. So hat Legendre in seiner Trigonometrie[2]) die Additionsformeln zunächst geometrisch für spitze Winkel a und b bewiesen, sei es daß deren Summe $\gtrless 90^0$ ist, dann aber erweiterte er die Gültigkeitsgrenzen, indem er zeigte, daß die Formeln auch noch gelten, wenn man die Winkel nacheinander beständig um $\frac{\pi}{2}$ wachsen läßt, woraus man schließt, daß sie endlich für beliebig große Werte von a und b gelten werden.[3]) Crelle hat in seiner deutschen Übersetzung von Legendres Werk 1833 einen andern mehr geometrischen Beweis angemerkt (p. 351).

Von einem andern Gesichtspunkt ging der berühmte L. A. Cauchy (1789—1857) in seinem Cours d'analyse von 1821[4]) aus, indem er zunächst durch eine ganz allgemeine Betrachtung, die sich an keine spezielle Figur band, mittelst der Projektion auf zwei rechtwinklige Achsen die vier prosthaphäretischen Formeln für ganz beliebige Bögen ableitete und aus ihnen dann leicht die gesuchten Gleichungen erhielt. Im gleichen Jahre gab Frédéric Sarrus[5]) folgenden ebenso kurzen

vergleichende Kritik dieser Methoden hat Theodor Häbler geliefert: Einladungsschrift zur Einweihung der Fürsten- und Landesschule zu Grimma 1891 und Jahresbericht, ebenda 1887/88, 41. Vgl. ferner W. F. Meyer, „Zur Ökonomie des Denkens in der Elementarmathematik“, Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung VII, 1899, 147—154, wo unter anderem gezeigt wird, wie aus einer für die Existenz eines Dreiecks charakteristischen Formelgruppe alle übrigen Gruppen durch rein algebraische Operationen hervorgehen (p. 150ff.).

1) Memorie della Società Italiana XII, parte I, 106—159. — 2) Éléments de géométrie. Die Auflage von 1804 enthält die Trigonometrie. Uns lagen die 14. Auflage von 1832 und die Übersetzung Crelles vor. — 3) Vgl. die Umgestaltung durch Thibault, Nouvelles Annales 1848, 309, durch Arndt, Archiv für Mathem. VI 1845, 95 und durch Åstrand, ebenda XVIII 1852. Alle möglichen Fälle hat Spitz einzeln diskutiert, Archiv für Mathem. 1859, XXII, 293—304. — 4) A. a. O. Note I, p. 433—435. Fast dieselbe Ableitung gab wieder Lemonnier in Nouv. Ann. 1871, 26—28. — 5) Annales de Mathém. XI, 1820/21, 323—325. In neuerer Zeit brachte einen analytisch-geometrischen Beweis wieder C. Juel, Nyt Tidskrift for Math. II 1891, 31—32.

als allgemeinen Beweis. Für beliebige Bögen x und y gelten die Gleichungen $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$ und $(\sin x - \sin y)^2 + (\cos x - \cos y)^2 = \text{cord}^2 (x - y)$ ohne Einschränkung. Aus diesen Gleichungen folgt leicht (A) $2 - 2(\sin x \sin y + \cos x \cos y) = \text{crd}^2 (x - y)$ und für $y = 0$, hieraus $2 - 2 \cos x = \text{crd}^2 x$; ersetzt man hier x durch $x - y$, so folgt (B) $2 - 2 \cos (x - y) = \text{crd}^2 (x - y)$ und durch Elimination von $\text{crd}^2 (x - y)$ zwischen (A) und (B) : $\cos (x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$ u. s. w.

Kehren wir wieder zu Cauchy zurück, der in seinem Cours d'analyse[1]) eine originelle Ableitung der ebenen Trigonometrie aus dem Sinussatze gegeben hat. Zu diesem Zwecke verschaffte er sich zuerst die beiden goniometrischen Formeln

$$\cos^2 \frac{A}{2} = \frac{(\sin A + \sin B + \sin C)(\sin B + \sin C - \sin A)}{4 \sin B \sin C}$$

und die analoge für $\sin^2 \frac{A}{2}$, führte dann aus dem Sinussatz statt der rechts stehenden Sinus die Seiten ein und erhielt so die beiden bekannten Halbwinkelformeln, die leicht zu den Gleichungen $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ und $\sin A = \frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{2bc}$ $\left(s = \frac{a+b+c}{2}\right)$ führten. Endlich wurde noch die Finckesche Tangentenformel aus dem Sinussatz direkt gewonnen. Diese Arbeit scheint Joh. August Grunert, Professor der Mathematik in Greifswald (1797—1872), nicht bekannt gewesen zu sein, sonst hätte er kaum 1842 eine ähnliche Ableitung aus dem Sinussatz und der Relation $A + B + C = 180^0$, die ihm nur noch die weniger bekannten Formeln $\sin\left(B + \frac{C}{2}\right) = \frac{a+b}{c}\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}$ und $\cos\left(B + \frac{C}{2}\right) = \frac{a-b}{c}\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}$ lieferte, mitgeteilt.[2]) Die gleiche Bemerkung ist auch bezüglich einer Ableitung des Additionstheorems zu machen, die er in seinem Lehrbuch der Mathematik und Physik

---

1) A. a. O. 436—437. Übrigens hat Cauchy 1833 in § 12 seiner Résumés analytiques, Oeuvres serie II, X noch eine größere Abhandlung über Trigonometrie niedergelegt, die aber wenig Originelles bietet. Er definierte darin die trigonometrischen Funktionen noch immer als Linien am Kreise, bestimmte aus der Festlegung ihres Richtungssinnes weit weniger exakt als Carnot die Zeichen derselben in den verschiedenen Quadranten, leitete an der Figur den Sinus- und den Projektionssatz ab und gewann aus letzterem das Additionstheorem für Winkel $< \frac{\pi}{2}$. (Ähnlich auch ein Ungenannter im Phil. Magazine 1825, LXV, 181.) Die allgemeine Gültigkeit desselben bewies er dann ähnlich wie Legendre — 2) Archiv für Mathem. II, 215—219. Die letzteren Formeln hatte übrigens schon 1831 Girault gegeben. Vgl. Bulletin de Férrusac 1831, XV, 159.

1843, III, 371 gibt.[1]) Dagegen muß bemerkt werden, daß Grunert schon in seinem Artikel „Goniometrie" im Supplement zu Klügels Wörterbuch 1836 (II, 581—705) und später wieder in jenem Lehrbuche Sinus und Cosinus als die rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes der Ebene definierte und so auf die Prinzipien der analytischen Geometrie sich stützend eine genaue Zeichenbestimmung der Funktionswerte für die Winkel in den verschiedenen Quadranten erreichte.[2])

Daß es praktisch ist, die trigonometrischen Funktionen im rechtwinkligen Koordinatensystem zu definieren, hob auch 1861 De Morgan in dem Artikel „Trigonometry" in der „English Cyclopaedia" VIII, 368, hervor, ging aber noch einen Schritt weiter, indem er sie, wie einst Klügel als Verhältnisse darstellte. Eine eigentümliche Ableitung des Additionstheorems sowie des Sinussatzes hat in der letzten Zeit (1887) C. A. Laisant (geb. 1841) gegeben.[3]) Indem er nämlich aus dem allgemeinen Projektionssatze für einen geschlossenen Polygonzug den Satz folgerte, daß wenn $A_1 \sin x_1 + A_2 \sin x_2 + \cdots + A_n \sin x_n = 0$ oder $A_1 \cos x_1 + A_2 \cos x_2 + \cdots + A_n \cos x_n = 0$ ist, auch die entsprechenden Ausdrücke verschwinden, die man erhält, wenn man x_λ durch $x_\lambda + \theta$, $\lambda = 1 \cdots n$, ersetzt, ergaben ihm die Formeln $1 \cdot \sin x = \sin x \sin \frac{\pi}{2} + \cos x \sin 0$ und $1 \cdot \cos x = \sin x \cos \frac{\pi}{2} + \cos x \cos 0$, sofort die Gleichungen $\sin(x + y) = \sin x \sin\left(\frac{\pi}{2} + y\right) + \cos x \sin y$ und $\cos(x + y) = \sin x \cos\left(\frac{\pi}{2} + y\right) + \cos x \cos y$, d. h. die Additionsformeln, während der Projektionssatz für das Dreieck in der Form geschrieben: $a \cos B + b \cos(-A) + c \cos(-\pi) = 0$ und $a \cos \pi + b \cos C + c \cos(-B) = 0$ sofort $a \cos(B + \theta) + b \cos(\theta - A) + c \cos(\theta - \pi) = 0$ und $a \sin(B + \theta) + b \sin(\theta - A) + c \sin(\theta - \pi) = 0$

1) Eine andere Ableitung gab er 1853, Archiv für Mathem. XXI, die sich übrigens fast ebenso schon bei Cagnoli, Trigonometrie, 2. Aufl., p. 18 findet und 1854 von Kösters in etwas abgeänderter Form im Archiv XXII, 282 wieder gebracht wird. Der Gedanke ist folgender: Man betrachtet das Additionstheorem als eine Idendität zwischen den drei Winkeln eines Dreiecks, indem man den Zusammenhang der Funktionen Sinus und Cosinus dieser Winkel durch den Sinussatz (Cagnoli), durch die Definitionsgleichungen dieser Funktionen mit Senkrechtfällung der Höhen (Grunert) oder durch den Dreiecksinhalt (Kösters) ausdrückt. — 2) Vgl. auch Riese im Archiv für Mathem. XXX, 1856, 143 ff.: der ebenfalls die Koordinatenmethode anwandte; übrigens hatte schon 1834 Dirichlet in einer in Berlin gehaltenen Vorlesung die ebene Trigonometrie als den Teil der analytischen Geometrie bezeichnet, bei welchem man den Zusammenhang der Linien und Winkel sucht. Vgl. E. Häntschel, Jahresbericht des Köllnischen Gymnasiums zu Berlin, 1900. — 3) Mathesis VII, 1887, 272 und ausführlicher in Bulletin de la société de France XV, 1886/87, 198—202. Ein ganz allgemeiner Beweis auf dieser Grundlage findet sich auch in Élements de Trigonométrie von E. Gelin Namur 1888.

ergab; die letztere Formel geht aber für $\theta = 0$ unmittelbar über in $a \sin B = b \sin A$. Diese Ableitung bedarf keiner Figur und ist daher von großer Allgemeinheit.

Die meisten Ableitungen der Grundformeln der Trigonometrie waren nur einfache Rechnungsexempel, nachdem einmal die Formelsprache ihre vollkommene Durchbildung erhalten hatte; viel wichtiger aber wäre es gewesen, den einen Fundamentalsatz, auf den sie zurückgriffen, z. B. den Sinussatz, möglichst allgemein zu begründen, woran jedoch niemand dachte, bis August Ferdinand Möbius, Professor in Leipzig (1790—1868), auf diese Notwendigkeit aufmerksam machte. Dies geschah in der Einleitung zu seiner „Theorie der Kreisverwandtschaft in rein geometrischer Darstellung", 1855.[1]) Seine Formulierung lautet: „Sind a, b, c drei willkürliche Gerade einer Ebene, die das Dreieck ABC bilden, bestimmt man willkürlich die positiven Richtungen von a, b, c und hiermit die Zeichen von BC, CA, AB (z. B. im Sinne der Aufeinanderfolge der Buchstaben), setzt man dann von dem doppelten Sinn, in welchem eine Linie in der Ebene gedreht werden kann, den einen, etwa den von der Linken nach der Rechten als positiv fest und bestimmt hiernach die Winkel bc, ca, ab so, daß bc denjenigen Winkel ausdrückt, um welchen die Gerade b um A nach Rechts gedreht werden muß, bis ihre positive Richtung mit der positiven Richtung von c identisch ist, so gilt auch den Zeichen nach die Gleichung

$$BC : CA : AB = \sin (bc) : \sin (ca) : \sin (ab)."$$

Einen allgemeinen Beweis hierfür hat später Richard Baltzer (1818—1887) mittelst der Projektion der Figur der drei Linien a, b, c auf eine Gerade, die er dann successive mit a und b zusammenfallen ließ, gegeben.[2]) Den hier auftretenden Richtungs- und Drehungssinn hatte Möbius schon im baryzentrischen Kalkul 1827 eingeführt und in seinen spätern Arbeiten durchweg festgehalten. In etwas veränderter Weise wurde derselbe 1877 von Ch. Brisse ebenfalls zur Definition der goniometrischen Funktionen als Verhältnisse und zur Ableitung der Additionsformeln verwendet.[3])

Eine ganz neue Begründung der Goniometrie aber hat in jüngster Zeit (1900) E. Häntschel gegeben.[4]) Er definiert zuerst die Funktionen

---

1) Abhandl. der k. Gesellsch. der W. zu Leipzig, Math.-phys. Kl. II, 529—595. Werke von Möbius II, 246—247, Anm. — 2) Die Elemente der Mathematik II, 1867, 2. Aufl. 301 ff. — 3) Nouv. Ann. XVI, 1877, 49—61. — 4) „Über die verschiedenen Grundlegungen in der Trigonometrie", Jahresbericht des Köllnischen Gymnasiums zu Berlin, Ostern 1900, 4°, ferner Unterrichtsblätter, Jahrg. VI, 1900. 90 und Jahresbericht desselben Gymnasiums, Ostern 1901, 4°.

als Verhältnisse am rechtwinkligen Dreieck, eine Definition, welche für Winkel im ersten Quadranten genügt, leitet dann die Gleichungen $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$, $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$, $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ und $\mathrm{cotg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ am gleichschenkligen Dreieck ab, und indem er diese als neue Definitionsformeln auffaßt, gelingt es ihm, den Gültigkeitsbereich der Funktionen stetig aus dem ersten in den zweiten Quadranten und aus diesem in die übrigen successive fortzusetzen. Damit ergibt sich die Periodizität und die Bedeutung der Funktionen negativer Winkel ohne jede Figur.[1])

Was sonst noch von Seiten jener Geometer, die sich von der Mitte des 19. Jahrhunderts an noch für elementare Mathematik interessierten, für den Aufbau der ebenen Trigonometrie geschah, fällt außerhalb des Rahmens unserer Betrachtungen, da es mehr pädagogische als wissenschaftliche Zwecke im Auge hatte.[2])

§ 2. Allgemeine Begründung der sphärischen Trigonometrie.

Wir kommen nun zur Betrachtung der verschiedenen Richtungen, welche eingeschlagen wurden, teils zur Begründung der sphärischen Trigonometrie, teils zur Erweiterung des Gültigkeitsbereiches ihrer Fundamentalformeln. Wie wir wissen, hatte Lagrange an derselben Figur, die schon Fr. Blake benützte, den Cosinussatz abgeleitet, und ihm war Carnot nachgefolgt, der diese Figur als ein rechtwinkliges Tetraeder auffaßte und so durch Spezialisierung einer für das allgemeine Tetraeder gewonnenen Formel den fraglichen Satz erhielt.[3]) Demgemäß war derselbe, wie auch durch alle früheren Ableitungen, nur für spitze Winkel gültig. Daher fühlte Carl Friedrich Gauß (1777—1855), der sich gelegentlich auch mit elementaren Fragen beschäftigte, die Notwendigkeit, denselben auf Winkel und Seiten, die den Quadranten übersteigen, auszudehnen, beschränkte sich aber, den Forderungen der Praxis entsprechend, auf Bögen $< 180^0$. Die Gelegenheit hierzu bot ihm die von seinem Freunde Heinrich Christian Schumacher (1781—1850) besorgte deutsche Ausgabe von Carnots Géométrie de position[4]), die er mit Noten versah. Eine solche Note führt die Überschrift: „Entwickelung der Grundformeln der

1) Vgl. auch R. Güntsche, Zeitschr. f. math. u. naturw. Unterricht XXXIII, 1902, 176—183. — 2) Vgl. z. B. Unferdinger im Archiv für Mathem. XXXIII, 1859, 429—432, ebenso Hoüel in Mémoires de la société de Bordeaux (2. Serie) V, 1877, 195. Dieser will auch in der Schule Goniometrie und Trigonometrie als einen Spezialfall der analytischen Geometrie aufgefaßt wissen. — Zahradnik, Beitrag zur Trigonometrie, Archiv für Mathem. LXII, 1878, 330 u. s. w. — 3) Géométrie de pos. Nr. 339—341. — 4) Geometrie der Stellung, Altona, 2 Bde. 8°, 1807—10.

sphärischen Trigonometrie."[1]) Darin unterscheidet er, um die Gültigkeit der Formel $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$ auszudehnen, folgende Fälle: 1) b und $c > 90^0$, dann ist (Fig. 36) im Nebendreieck $A'BC$, $BA' = 180^0 - c < 90^0$ und $CA' = 180^0 - b < 90^0$, $\sphericalangle A' = A$, also gilt für dieses Dreieck der Cosinussatz, der sofort wieder in die obige Form übergeht. 2) $b > 90^0$, $c < 90^0$; hier gilt der Satz für das Nebendreieck BAC' und wird $\cos(180^0 - a) = \cos c \cos(180^0 - b) + \sin c \sin(180^0 - b) \cos(180^0 - A)$, der ebenfalls die obige Form annimmt. 3) $b = 90^0, A = 90^0$ oder $c = 90^0, A = 90^0$; hier ist C der Pol von AB, also ist die Formel von selbst evident. 4) $b = 90^0$, $A \gtrless 90^0$; für $c = 90^0$ gilt das Gleiche wie in 3), für $c < 90^0$ wird c bis zu $AD = 90^0$ verlängert und $\triangle BDC$ gebildet, dann ist A der Pol von CD, also aus Dreieck CBD: $\cos a = \cos(90^0 - c) \cos A + \sin(90^0 - c) \sin A \cos 90^0$, oder $\cos a = \sin c \cos A$, was sich auch aus der Hauptformel für $b = 90^0$ ergibt. Ist endlich $c > 90^0$, so wird $AD = 90^0$ von AB abgeschnitten und Dreieck BCD vollendet, das dann $\cos a = \cos(c - 90^0) \cos A + \sin(c - 90^0) \sin A \cos 90^0$ oder $\cos a = \sin c \cos A$ liefert, ebenfalls in Übereinstimmung mit der Hauptformel. Da die Fälle $b < 90^0$ oder $b > 90^0$ und zugleich $c = 90^0$ mit diesen wesentlich identisch sind, so ist damit die allgemeine Gültigkeit der Formel bewiesen. Gauß' Ableitung der übrigen Hauptformeln aus der Cosinusformel unterscheidet sich etwas von jener Lagranges, ist jedoch weniger natürlich als diese.[2])

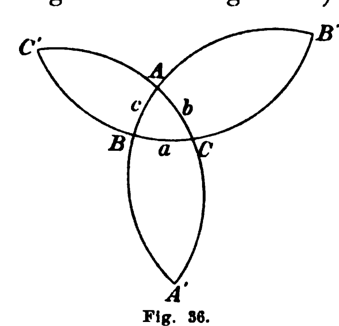


Fig. 36.

An jener Stelle der „Theoria motus"[3]), an welcher Gauß die oft nach ihm benannten Gleichungen mitteilte, machte er übrigens die Bemerkung, daß es viele ausgezeichnete Vorteile gewähre, die Idee des sphärischen Dreiecks in der größten Allgemeinheit aufzufassen, d. h. so, daß weder Seiten noch Winkel durch irgend welche Grenzen beschränkt werden; zugleich versprach er bei einer andern Gelegenheit darauf zurückzukommen, was jedoch nie geschehen ist; seinen Gedanken näher auszuführen, blieb andern vorbehalten.

Zwei Jahre nach dem Erscheinen von Carnots Geometrie, die dem großen Gauß Anlaß geboten hatte, die allgemeine Gültigkeit der

1) A. a. O. II, 373—376 oder Gauß' Werke IV, 401. — 2) Ähnlich wie Gauß hatte schon Klügel den Gültigkeitsbereich der Formeln für das rechtwinklige Dreieck erweitert (siehe S. 136). — 3) Theoria motus corporum coelestium, 1809, Nr. 136.

trigonometrischen Formeln, wenigstens für alle in der Praxis vorkommenden Dreiecke, nachzuweisen, erschien ein Aufsatz[1]) von dem Pisaner Mathematiker Pietro Ferroni (1744—1825), in welchem er einerseits das ganze Formelsystem der ebenen Trigonometrie aus jenem der sphärischen ableitete, indem er das schon von Mauduit benützte Prinzip des Grenzübergangs anwandte und schärfer präzisierte[2]) und andererseits nachwies, daß die Grundformeln sämtlich in einer Gleichung von der Gestalt $\cos z \pm g \sin z \mp h = 0$ enthalten sind. Nach dem Vorgange des Franzosen Goudin[3]) (1734—1817) zeigte er dann, daß sich diese Formeln an einer gewöhnlichen Ellipse entwickeln lassen, daß man beim Übergang derselben in den Kreis diejenigen für das rechtwinklige oder für das Quadrantendreieck und beim Übergang in die Parabel die Gleichungen für gleichschenklige sphärische Dreiecke erhält, während endlich die Interpretation an der Hyperbel die Formeln der hyperbolischen Trigonometrie liefert.

Andere, wie Legendre in seiner vielgelesenen Trigonometrie, die als Anhang zur Geometrie vielfach aufgelegt wurde, Lacroix in seinem „Traité de trigonométrie“ 1805 (deutsch von Ideler 1822) und Delambre in der Abhandlung über Trigonometrie im B. I der „Astronomie théorique et pratique“, Paris 4°, 1814 schlossen sich an Lagrange an, dessen Ableitung des Sinussatzes aus der Cosinusformel von Gergonne 1812[4]) etwas umgestaltet wurde. Auf eine Erweiterung des Gültigkeitsbereiches der Formeln, wie sie Klügel und Gauß geliefert hatten, nahmen sie jedoch keine Rücksicht.

Von einem andern Standpunkt aus geschah die Begründung der Hauptformeln durch Jakob Sturm[5]) (1803—1855) und Joseph Raabe[6]) (1801—1859), welche die analytische Geometrie zu Hilfe

1) Paralleli e principio unico e semplice delle due trigonometrie. Memorie della Società Italiana XII, 1805, 106—183. Die Schrift enthält sehr viele äußerst wertvolle historische Notizen. — 2) Er leitete nämlich die Hauptformeln aus einem Tetraeder ab, dessen Spitze im Kugelmittelpunkt liegt, während die Kanten der gegenüberliegenden Fläche die Sehnen des sphärischen Dreiecks sind; rückt dann die Spitze ins Unendliche, so geht das Tetraeder in ein rechtwinkliges Prisma über u. s. w. Analytisch genau wurde dieser Grenzübergang allerdings erst viel später gemacht, z. B. von Gelin, Mathesis, 1888, VIII, Suppl. IV. — Eine sehr vollständige Zusammenstellung der hierdurch auseinander ableitbaren Formeln hat P. von Schäwen gegeben. Zeitschrift für das Realschulwesen, Wien 1882, VII, 394—401, 469—478. — 3) Mémoire sur les usages de l'Ellipse dans la Trigonométrie sphérique, Paris 1797, 4°, Cap. II, 18. — 4) Annales de Mathém. III, 348—352. — 5) Recherches analytiques sur les polygones rectilignes planes ou gauches. Annales de Mathém. XV, 1824/25, 309 ff. — 6) Sphärische Polygonometrie. Journal für Mathem. II, 1827, 9—21. Genaueres über diesen Aufsatz weiter unten! Den Sinussatz hatte übrigens schon

nahmen. Beide zeigten, daß sich die drei Hauptformeln der sphärischen Trigonometrie durch Spezialisierung der Transformationsformeln, welche ein rechtwinkliges Raumkoordinatensystem in ein anderes gleichartiges überführen, erhalten lassen. Die Allgemeingültigkeit der Transformationsformeln gewährleistete dann auch die Gültigkeit der trigonometrischen Formeln für beliebige Dreiecke. Den einfachsten Weg schlugen sie jedoch hierbei nicht ein, denselben scheint vielmehr erst Louis Puissant (1769—1843) gefunden zu haben, der in der dritten Auflage seines „Traité de Géodésie", Paris 4°, 1842, II, 65—66 die rechtwinkligen Koordinaten eines Kugelpunktes durch räumliche Polarkoordinaten ausdrückt, „dem Koordinatensystem eine Drehung um eine Axe (x) auferlegt und dann durch Einführung der Polarkoordinaten in die Transformationsformeln $x = x'$, $y = y' \cos \omega - z' \sin \omega$, $z = z' \cos \omega + y' \sin \omega$ aus ihnen direkt die Hauptgleichungen in ihrer einfachsten Gestalt erhält".[1]) Daß hierdurch eine allgemeine Gültigkeit der Formeln begründet ist, hebt er allerdings nicht hervor, wohl weil er nur gelegentlich der Behandlung einer astronomischen Frage zu dieser Ableitung gelangt.

Um dieselbe Zeit, da Sturm und Raabe die Koordinatentransformation entwickelten, gab Franz Moth[2]) (1802—1879), Professor in Wien, von anderem Gesichtspunkt ausgehend, ebenfalls eine analytisch-geometrische Ableitung der sphärischen Trigonometrie. Er stützte sich dabei auf algebraische Relationen, die Lagrange bereits im Jahre 1773 aufgestellt hatte[3]) und die wir heute als einfache Folgerungen einiger Determinantensätze erhalten. Indem Moth die von Lagrange aufgestellten Relationen weiter entwickelte — er leitete nicht weniger als 176 Gleichungssysteme mit mehr als 700 Formeln ab — fand er, daß gewisse unter ihnen, passend gedeutet, nicht nur

---

Français im Journal de l'École Polyt. VII, 1808, 189 aus den Transformationsformeln abgeleitet, ohne jedoch die übrigen Formeln zu berücksichtigen.

1) Man findet Puissants Ableitung in neueren Kompendien der Trigonometrie verwendet, so in dem Werke von Chauvenet: Treatise on plane and spherical Trigonometry, und Spherical and Practical Astronomy I, 28, in Brünnows „Sphärische Astronomie", Berlin 1851, 8° und in Hammers „Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie", Stuttgart 1885, 8°, 2. Aufl. 1897. — Eine Ableitung der Hauptsätze, die Matzka 1849 im Archiv für Mathem. XIII, 88 gegeben hat, läuft im Grunde auf die Puissants hinaus, obwohl sie etwas anders eingekleidet ist. — 2) Astronomische Nachrichten Nr. 130, VI, 1828, 217—220 und vollständiger in: „Die Lagrangeschen Relationen und ihre Anwendung zu einer neuen Entwicklung aller Gleichungen der sphärischen Trigonometrie", Prag 1829 in 4°. — 3) Solutions analytiques de quelques problèmes sur les pyramides triangulaires. Nouv. Mémoires de l'Acad. de Berlin, 1773; Oeuvres, ed. Serret, III, 661 ff.

die trigonometrischen Hauptformeln ergeben, sondern eine ganze Menge bekannter und neuer Beziehungen erkennen ließen. In neuerer Zeit, 1875, hat F. J. Studnička (geb. 1836), ein Schüler Moths, die Betrachtungen seines Lehrers wieder aufgenommen und, indem er erkannte, daß dieselben auf die Verwendung von heute allgemein bekannten Determinantensätzen hinauslaufen, eine direkte Ableitung der Grundformeln mit Zugrundelegung einiger solcher Sätze versucht. Da wir auf Moths weitschweifige Ableitung nicht eingehen können, Studničkas Darstellung aber von demselben Gedanken ausgeht, so wollen wir letztere kurz skizzieren.

Haben drei Ebenen I, II, III, welche sich im Anfangspunkt eines rechtwinkligen Koordinatensystems schneiden, die Gleichungen $\alpha_i x + \beta_i y + \gamma_i z = 0$, $(i = 1, 2, 3)$ und bilden sie die Schnittkanten 1, 2, 3 mit den Gleichungen $y = \frac{B_i}{A_i} x$, $z = \frac{C_i}{A_i} x$, wobei die A_i, B_i, C_i die Unterdeterminanten der Elemente von $\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \\ \alpha_2 \beta_2 \gamma_2 \\ \alpha_3 \beta_3 \gamma_3 \end{vmatrix}$ sind, so kann man sich leicht die Ausdrücke für die Sinus und Cosinus der Flächenwinkel (II, III), (III, I), (I, II) und der Kantenwinkel (2, 3), (3, 1), (1, 2) verschaffen. Denkt man sich hierauf um den Anfangspunkt als Mittelpunkt eine Einheitskugel gelegt, so entsteht auf derselben ein sphärisches Dreieck ABC mit den Winkeln (II, III) $= A$, (III, I) $= 180^0 - B$, (I, II) $= C$ und den Seiten $(2, 3) = 180^0 - a$, $(3, 1) = b$, $(1, 2) = 180^0 - c$. Führt man diese Werte in die erwähnten Gleichungen für die Neigungswinkel ein und bezeichnet noch $A_i^2 + B_i^2 + C_i^2$ mit M_i^2, so entstehen folgende Formelsysteme: $\sin A = M_1$, $\sin B = M_2$, $\sin C = M_3$; $\sin a = \frac{\Delta}{M_2 M_3}$, u. s. w.; $\cos A = \Sigma(\alpha_2 \alpha_3)$, $-\cos B = \Sigma(\alpha_3 \alpha_1)$, $\cos C = \Sigma(\alpha_1 \alpha_2)$ und $-\cos a = \frac{\Sigma(A_2 A_3)}{M_2 M_3}$, $\cos b = \frac{\Sigma(A_3 A_1)}{M_3 M_1}$, $-\cos c = \frac{\Sigma(A_1 A_2)}{M_1 M_2}$, wobei die Summen auf die drei Buchstaben α, β, γ, beziehungsweise A, B, C auszudehnen sind. Diese Formeln liefern unmittelbar die Fundamentalgleichungen, wenn man einige bekannte Determinantensätze inbetracht zieht. So erhält man z. B. sofort aus den ersten beiden Gleichungssystemen:

$$\Delta = \sin B \sin C \sin a = \sin C \sin A \sin b = \sin A \sin B \sin c$$

und hieraus den Sinussatz, während der Cosinussatz aus der aus der Multiplikation der Determinanten hervorgehenden Gleichung

$$\Delta^2 (\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2) = - \begin{vmatrix} M_2 M_3 \cos a, & M_3^2 \\ M_1 M_2 \cos c, & M_3 M_1 \cos b \end{vmatrix}$$

entsteht, wenn man den obigen Wert von Δ, $\Sigma(\alpha_1 \alpha_2) = \cos C$ und die aus dem ersten Gleichungssystem sich ergebenden Werte von M_i einführt u. s. w.

Herrschte in den zuletzt besprochenen Abhandlungen die Tendenz vor, die bekannten Hauptformeln der sphärischen Trigonometrie auf analytischem Wege allgemein zu begründen, so gab es auch Gelehrte, welche weder die analytische Ableitung für die richtige hielten, noch überhaupt die bisherigen Fundamentalformeln als die zur Begründung der Trigonometrie allein zweckmäßigen anerkennen wollten. So fand Friedrich Schmeißer, daß die „langweiligen und gezwungenen“ analytischen Operationen nur zu Sätzen führen (gemeint sind eben die gewöhnlichen Hauptformeln), welche für die Rechnung unpraktisch seien. Deshalb verschaffte er sich durch eine übrigens sehr komplizierte geometrische Betrachtung folgende 4 Fundamentalformeln:[1])

$$\sin\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\sin C = \sin\frac{c}{2}\cos(S-A),$$

$$\cos\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin C = \sin\frac{c}{2}\cos(S-B),$$

$$\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\sin C = \cos\frac{c}{2}\cos(S-C),$$

$$\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin C = -\cos\frac{c}{2}\cos S\text{ [2]}),$$

wo wir $\frac{A+B+C}{2} = S$ setzten, und außerdem gingen aus seiner Figur auch die 4 Delambreschen Gleichungen hervor, auf die wir noch weiter unten zu sprechen kommen. Da sich diese 8 Gleichungen aus zwei Figuren ergaben, von denen sich die eine auf Dreiecke mit Seiten und Winkeln unter 90^0, die andere auf solche mit Seiten und Winkeln $> 90^0$ beziehen, so sind diese Formeln damit allgemein bewiesen. Die ersten 4 dieser Gleichungen lassen noch vier Polarformeln entstehen, und somit hat man ein System von 12 Fundamentalgleichungen, die durch zyklische Vertauschung 36 Formeln liefern. Aus ihnen erhält man dann bloß durch Multiplikation und Division, sohin „ohne analytische Umwege“, alle Relationen zwischen 5 und 4 Dreiecksstücken, welche zur Auflösung der Kugeldreiecke erfordert werden und zur sofortigen logarithmischen Behandlung anwendbar sind; von den gewöhnlichen Hauptsätzen leitet er überhaupt nur den Sinussatz aus seinem Formelsystem ab.[3])

---

1) Journal für Math. X, 1833, 129—153. — 2) Die letzte schon bei Legendre, Géométrie Note X. — 3) Schmeißers Hauptformeln wurden umgekehrt aus den gewöhnlichen Gleichungen abgeleitet von Callète, Nouv. Ann. VIII, 435 ff.

Den originellen Gedanken Schmeißers, ein neues System von praktisch verwendbaren Fundamentalformeln zu schaffen, verfolgte Karl Anton Bretschneider (1808—1878) weiter[1]), hielt aber die analytische Methode für die passendere, die nur in der richtigen Weise angewendet werden dürfe, wenn man auf natürlichem Wege zu den wichtigsten Formeln gelangen wolle. Zur Begründung der Trigonometrie scheint ihm die Koordinatenmethode am geeignetsten zu sein, da es durch sie allein gelingen könne, „Schärfe der Darstellung mit der nötigen Allgemeinheit zu vereinigen". Von ihr ausgehend gelangt er zur allgemein gültigen Cosinusformel und wendet als alleiniges Prinzip zur weiteren Formelbildung die korrespondierende Addition und Subtraktion an. Sie liefert ihm zunächst in bekannter Weise die Halbwinkelformeln, aus denen die Gleichung $\sin A = \frac{2\Sigma}{\sin b \sin c}$ und die polare Formel $\sin a = \frac{2\Sigma'}{\sin B \sin C}$ (Σ bedeutet $\sqrt{\sin s \sin (s-a) \sin (s-b) \sin (s-c)}$ und Σ' den polaren Ausdruck hierzu)[2]), hervorgehen, die dann leicht den Sinussatz liefern; $m = \frac{\sin A}{\sin a}$ u. s. w. nennt er (p. 90) den Modulus des Dreiecks. „Dieser Modulus erscheint in den Relationen der sphärischen Trigonometrie sehr häufig, wenn Funktionen der Winkel durch Funktionen der Seiten dividiert werden, und vereinfacht weitläufige und zusammengesetzte Formeln oft auf eine merkwürdige Weise." Aus den Halbwinkelsätzen ergeben sich dann leicht 4 Formeln von der Gestalt $\frac{\cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2}}{\sin \frac{A}{2}} = \frac{\sin s}{\sin a}$, wozu das Polardreieck weitere vier liefert, und aus ihnen gewinnt man durch Addition und Subtraktion die Delambreschen Gleichungen.[3]) Diese werden jetzt abermals als ein System von Grundformeln angesehen, da sie elegante Beziehungen zwischen den 6 Stücken eines Dreiecks bieten, und die Methode der korrespondierenden Addition und Subtraktion fördert unmittelbar 8 neue Formeln zutage, welche von der Form sind:

$$\sin \frac{A+B+C-180^0}{4} \sin \frac{-A+B+C+180^0}{4} : \sin \frac{A}{2}$$
$$= \sin s \sin (s-a) : \cos \frac{\alpha}{2}.$$

Sie geben, wie Bretschneider sagt, die merkwürdigsten und elegantesten Formeln der sphärischen Trigonometrie:

1) Journal für Mathematik XIII, 1835, 88 ff. — 2) Die Abkürzung s führt er übrigens nicht ein. — 3) Diese Ableitung hatte schon Buzengeiger 1818 in Lindenaus Zeitschrift für Astronomie VI, 316 gegeben.

$$\sin^2\frac{\varepsilon}{4}=\frac{\sin\frac{s}{2}\sin\frac{s-a}{2}\sin\frac{s-b}{2}\sin\frac{s-c}{2}}{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}$$

und

$$\cos^2\frac{\varepsilon}{4}=\frac{\cos\frac{s}{2}\cos\frac{s-a}{2}\cos\frac{s-b}{2}\cos\frac{s-c}{2}}{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}},$$

($\varepsilon = A + B + C - 180^0$).[1]) Ein neues System von Fundamentalformeln ergibt sich durch Multiplikation je zweier Delambrescher Gleichungen, und abermalige Anwendung des erwähnten Umformungsprinzipes läßt weitere Relationen zwischen den sechs Stücken entstehen. Übrigens gibt Bretschneider auch für das ältere „weniger elegante" Formelsystem eine neue Ableitung. Außerdem hebt er ausdrücklich hervor, und darin unterscheidet er sich von Schmeißer, daß seine Systeme nur eine theoretische Bedeutung haben, indem sie die zwischen den Winkel- und Seitenfunktionen eines Dreiecks stattfindenden Relationen kennen lehren, während für praktische Rechnungen auch nach seiner Ansicht die älteren Formeln größtenteils brauchbarer sind.

Im Gegensatz zu Bretschneiders analytischem Standpunkt bevorzugten Karl Friedrich Schulz[2]) (1828) und nach ihm Christoph Gudermann[3]) (1835) den rein geometrischen, indem sie eine geometrische Sphärik schufen. Der letztere betrachtete die Berechnung der rechtwinkligen und schiefwinkligen sphärischen Dreiecke gesondert, indem er die Formeln hierzu einzeln aus dem Trieder ableitete. „Diese Methode", sagte er, „ist die der Alten, ihre Vernachlässigung rächt sich, ihre Förderung ist preiswürdig"; weiter aber als die Alten ging er, indem er die Gültigkeit der Formeln durch ähnliche Betrachtungen, wie sie Gauß angestellt hatte, auf Dreiecke, deren Elemente 90^0 übersteigen, ausdehnte. Auf die zahlreichen Resultate des Buches werden wir weiter unten noch zurückkommen.

Geringe Kenntnis der vorhandenen Literatur, namentlich der älteren, war bei den Mathematikern der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts an der Tagesordnung; daher kam es, daß immer wieder Ableitungen, namentlich des Cosinussatzes, publiziert wurden, die sich mehr oder weniger mit schon vorhandenen deckten, höchstens waren sie etwas allgemeiner gefaßt. So erschien 1844 eine Ableitung des-

---

1) Dieselben fanden wir schon bei Lexell (S. 137). — 2) Die Sphärik oder die Geometrie der Kugelfläche, Leipzig 1828, 8°. — 3) Lehrbuch der niederen Sphärik, Münster 1835, 8°.

selben von C. T. Anger[1]) und 1861 eine solche von E. Schreder[2]), welche sich wenig von jener Lagranges unterscheiden, Matzka gab 1849 eine Ableitung[3]) der Hauptformeln aus einer Figur, deren sich schon Ferroni bedient hatte, wenn auch der erstere durch Benützung des Projektionssatzes für einen gebrochenen Linienzug seiner Darstellung ein allgemeineres Gepräge zu geben verstand. Derselben Methode bediente sich auch Duhamel[4]) in seinen Vorlesungen, und Frankes Ableitung (1851)[5]) stellt sich ebenfalls unmittelbar neben jene Matzkas. Grunert leitete 1851[6]) aus dem rechtwinkligen Dreikant die Formeln $\sin b = \sin a \sin B$, $\cos B = \cos b \sin c$, $\cos a = \cos b \cos c$ und aus diesen alles Übrige durch Rechnung ab, ein Verfahren, das unter andern auch Schlömilch (1823—1901) in seiner bekannten „Geometrie des Maßes"[7]) 1849 einschlug. 1851 veröffentlichte Giusto Bellavitis (1803—1880)[8]) eine graphische Ableitung der sphärischen Hauptformeln, die Christian Wiener (1826—1896) in sein Lehrbuch der darstellenden Geometrie (1884—1887) I, p. 113 aufnahm, und J. J. Hemming schloß eine ebensolche 1872[9]) an eine von Fiedler (geb. 1832) 1863[10]) gegebene geometrische Konstruktion der dreiseitigen Körperecke an. Auch Grunert gab 1855[11]) eine Ableitung des Cosinussatzes aus dem Triedernetz, ähnlich jener Oppels, und O. Werner veröffentlichte in demselben Jahre eine sehr gekünstelte Ableitung der Formeln des sphärischen Dreiecks aus einem ebenen, das in einem bestimmten Zusammenhang mit dem sphärischen steht.

Die stereographische Projektion war, wie wir wissen, früher schon vielfach zur Auflösung sphärischer Dreiecke benützt worden, doch scheint eine systematische Ableitung aller Hauptformeln erst Paul Serret 1855 gegeben zu haben.[12]) Dieselbe zeichnet sich durch große Einfachheit und Eleganz aus und schließt auch die komplizierteren Formeln wie die Delambreschen und Neperschen in sich.

---

1) Archiv für Mathem. V, 79. — 2) Ebenda XXXVII, 438—442. — 3) Ebenda XIII, 92—95. — 4) Veröffentlicht von Lemonnier in Nouv. Ann. IV, 1845, 606. — 5) Archiv für Mathem. XVII, 1851, 309—312. — 6) Archiv für Mathem. XVI, 1851, 194 und XVII, 1851, 259. Grunerts Methode hat Wiegand zu einer systematischen Darstellung verarbeitet: Grundzüge der sphärischen Trigonometrie, Halle 1853. Ebenso Gent: Programm der Ritterakademie zu Liegnitz 1853. — 7) 2. Tl. 154—155. — 8) Lezioni di Geometria descrittiva, Padova 1851, 43. — 9) Zeitschr. für Math. und Phys. XVII, 159. — 10) Ebenda VIII, 428. — 11) Archiv für Mathem. XXV, 1855, 225—226. Daran anschließend gab Unferdinger ebenda in Bnd. XXVI, 1856, 436—442 eine Ableitung der Halbwinkelformeln. — 12) Des méthodes en Géométrie, Paris 1855, 8°, Kap. 25, auch mitgeteilt von Grunert im Archiv für Mathem. XXXIX, 1862, 318—332.

Die wichtigsten Arbeiten aber inbezug auf die Begründung der sphärischen Trigonometrie, welche zugleich die Bedeutung ihrer Formeln für Winkel und Seiten kleiner als 2π zu voller Allgemeinheit erhoben, gehören dem uns schon bekannten Möbius an. Schon 1846 veröffentlichte derselbe eine Abhandlung „Über eine neue Behandlungsweise der analytischen Sphärik"[1]), worin er die in seinem baryzentrischen Kalkul eingeführte Methode zur Ableitung der sphärischen Hauptformeln anwandte. Sein Verfahren beruht auf folgendem äußerst allgemeinen Satze: „Sind drei in einem Hauptkreis liegende Punkte A, B, P gegeben, von denen keiner mit dem andern identisch oder dessen Gegenpunkt ist, so lassen sich drei in solchen Verhältnissen zu einander stehende Zahlen a, b, p finden, daß für jeden Ort eines vierten Punktes V der Kugelfläche stets $a \cos(VA) + b \cos(VB) = p \cos(VP)$ ist." „Ferner sind dann die nur auf eine Weise bestimmbaren Verhältnisse $a : b : p$ den Verhältnissen zwischen den Seiten eines Dreiecks FGH gleich, dessen Winkel von den zwischen A, B, P begriffenen Bögen gemessen werden, also muß sein: $a : b : p = \sin PB : \sin AP : \sin AB$, und somit besteht die Gleichung:[2])

$$\sin(PB)\cos(VA) + \sin(AP)\cos(VB) = \sin(AB)\cos(VP)\text{''},$$

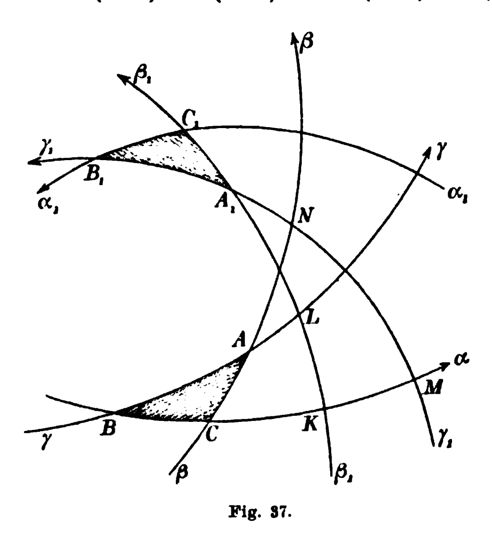


Fig. 37.

für die mit Weglassung von $\cos V$ symbolisch geschrieben wird: $\sin PB \cdot A + \sin AP \cdot B = \sin AB \cdot P$. — Für $AB = 90^0$ wird dann speziell $P = \sin PB \cdot A + \sin AP \cdot B$.

Nun konstruiert Möbius folgende Figur auf der Kugelfläche bestehend aus lauter größten Kreisen: α, β, γ seien bezüglich die Hauptkreise durch die Punkte B und C, C und A, A und B; die positive Zählungsrichtung dieser drei Kreise werde willkürlich bestimmt (Pfeilrichtung in Fig. 37), dann nimmt man in α arc $BK = 90^0$, in γ arc $BL = 90^0$, legt durch

1) Abhandl. der sächs. Gesellsch. der Wiss. in Leipzig 1846, 45—86; Werke von Möbius II, 1—69. — 2) Diese Gleichung findet sich, wenn auch nicht in solcher Allgemeinheit, bereits bei Carnot, Géométrie de position Nr. 344, 404. — Schulz hat sie dann in seiner Sphärik II, 49 etwas verallgemeinert, und Möbius teilte sie in obiger Form schon 1839 in einer Vorlesung mit (Baltzer, Elemente der Mathematik, 5. Aufl. II, 333, Anmerk.). Rein geometrisch begründet hat sie Baltzer a. a. O.

K und L einen Hauptkreis, bestimmt willkürlich dessen positive Richtung und macht $KA_1 = LC_1 = 90^0$, dann sind A_1 und C_1 Pole von α und γ, und zwar gleichnamige, d. h. auf derselben Seite (rechts oder links) für einen in positiver Richtung den Hauptkreis durchlaufenden Beobachter gelegen.[1]) Macht man dann in α arc $CM = 90^0$, in β arc $CN = 90^0$ und verbindet M mit N durch einen Hauptkreis, so wird dieser die Pole von α, deren einer A_1 ist, und von β enthalten. Man bestimme die positive Richtung von MN so, daß $MA_1 = 90^0$ (nicht $= 270^0$) ist, und nehme $NB_1 = 90^0$, so sind A_1 und B_1 gleichnamige Pole von α und β, also A_1, B_1, C_1 gleichnamige Pole von α, β, γ, und somit auch A, B, C die Pole von α_1, auf welchem B_1C_1, von β_1, auf welchem A_1C_1, und von γ_1, auf dem A_1B_1 liegt. Die Wahl der positiven Richtung von $\alpha, \beta, \gamma, \beta_1$ war also willkürlich, während die der andern Kreise so festgesetzt wurde, daß die drei Punkte je eines der beiden Systeme A, B, C und A_1, B_1, C_1 gleichnamige Pole der drei Kreise des andern Systems sind.

Der oben mitgeteilte Satz gibt nun die Relationen zwischen den 6 Bögen $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $B_1C_1 = a_1$, $C_1A_1 = b_1$, $A_1B_1 = c_1$. Da nämlich $BL = CN = KA_1 = MA_1 = 90^0$ ist, und in diesen 4 Bögen resp. die Punkte A, A_1, L, N liegen, so erhält man:

$$A = \cos BA \cdot B + \sin BA \cdot L, \quad A = \cos CA \cdot C + \sin CA \cdot N$$

und

$$L = \cos KL \cdot K + \sin KL \cdot A_1, \quad N = \cos MN \cdot M + \sin MN \cdot A_1.$$

Es ist aber $BA = 360^0 - c$, $CA = b$, $KL = A_1C_1 = 360^0 - b_1$, $MN = A_1B_1 = c_1$.

Vergleicht man die beiden Gleichungen für A, nachdem man diese Werte eingeführt hat, und setzt dann die Werte von L und N aus den letzten zwei Formeln ein, so erhält man folgende Grundformel, aus der sich die gesuchten Relationen mit Leichtigkeit ergeben:

$$\cos c \cdot B - \cos b \cdot C = \sin c \cos b_1 \cdot K + \sin b \cos c_1 \cdot M$$
$$+ (\sin b \sin c_1 - \sin c \sin b_1) \cdot A_1.$$

Da nämlich B, C, K, M in einem Hauptkreis liegen, A_1 aber nicht, so muß sein Koeffizient verschwinden, woraus (I) $\sin b \sin c_1 = \sin c \sin b_1$ folgt. Die übrigbleibende Relation gibt, für das implizite in ihr enthaltene V einmal B, dann K gesetzt (wegen $BK = 90^0$), die zwei Gleichungen $\cos c - \cos b \cos a = -\sin b \sin a \cos c_1$ und

1) Die Notwendigkeit, „gleichliegende" Pole zu wählen, betonte schon Gauß in den Disquisitiones gen. circa superficies curvas 1827, 2, VI, Werke IV, 221.

(II) $-\cos b \sin a = \sin c \cos b_1 + \sin b \cos c_1 \cos a$, oder wenn man hier statt $\sin c$ seinen Wert aus (I) einführt: $-\sin a \operatorname{ctg} b = \sin c_1 \operatorname{ctg} b_1 + \cos c_1 \cos a$ (III), und da es noch gestattet ist a, b, c mit a_1, b_1, c_1 zu vertauschen, so folgt aus (II) weiter $\cos c_1 - \cos b_1 \cos a_1 = -\sin b_1 \cos c \sin a_1$ (IV). a_1, b_1, c_1 sind aber gleich den nach einerlei Seite gezählten Winkeln $(\beta\gamma)$, $(\gamma\alpha)$, $(\alpha\beta)$, wodurch das System A_1, B_1, C_1 ganz außer acht bleibt. Führt man nun noch einen Drehungssinn derart ein, daß der Winkel zweier Bögen der Winkel zwischen ihren positiven Richtungen vom Schnittpunkte gerechnet ist[1]), so folgt: $a_1 + A = 180^0$ u. s. w., und die obigen vier Gleichungen gehen leicht in die bekannten Formeln über. „Hiermit sind dann diese Gleichungen in völliger Allgemeinheit und damit auch für den Fall als richtig nachgewiesen, wenn die Bögen oder Winkel zwischen 180^0 und 360^0 fallende Werte haben.“

Möbius' Beweis stützte sich auf den angeführten Satz, dessen allgemeine Richtigkeit sich ihm aus einem dem baryzentrischen Kalkul ähnlichen Algorithmus ergeben hatte. Es mußte aber natürlich auch eine rein elementare Begründung der Hauptformeln in derselben Allgemeinheit möglich sein, und diese hat Möbius in einer zweiten Abhandlung aus dem Jahre 1860 geleistet[2]) und damit eigentlich erst den Untersuchungen über den Gültigkeitsbereich der trigonometrischen Formeln für einen genügend allgemeinen Begriff des sphärischen Dreiecks den wünschenswerten Abschluß gebracht.

Legt man den Winkeln und Seiten eines solchen Dreiecks keine weitere Beschränkung auf, so hat nach Möbius jede Aufgabe der sphärischen Trigonometrie an sich zwei Lösungen; z. B. wenn a, b, C gegeben ist, so kann c und $360^0 - c$ genommen werden. Um diese Fälle zu trennen, führt er wie früher sowohl einen Zählungssinn für die Bögen, als einen Drehungssinn für die Winkel ein, indem er beides auf das genaueste präzisiert. Dann stellt er folgenden ganz allgemeinen Satz auf: „Hat man drei Gerade α, β, γ im Raume, die sich in O schneiden, und ist Ebene $(\beta\gamma)$ senkrecht Ebene $(\gamma\alpha)$, ist ferner G ein beliebiger Punkt in β, F die rechtwinklige Projektion von G auf α und H die auf γ, so ist mit Berücksichtigung der Zeichen, welche den Abschnitten OF und OG zufolge den Richtungen von α und β zukommen, das Verhältnis $OF : OG = \cos(\alpha\beta) = \cos(\beta\alpha)$, weil mit Änderung des Sinnes der Drehung das Verhältnis der Abschnitte sich nicht ändert. Ferner ist $OF : OH = \cos(\alpha\gamma)$,

1) Gauß a. a. O. 2, VI, Opera IV, 221. — 2) Entwicklung der Grundformeln der sphärischen Trigonometrie in größtmöglicher Allgemeinheit. Leipziger Berichte 1860, XII, 51—64; Werke II, 73—88. —

$OH : OG = \cos(\gamma\beta)$, mithin $\cos(\alpha\gamma)\cdot\cos(\gamma\beta) = \cos(\alpha\beta)$." Wird nun eine um O als Mittelpunkt beschriebene Kugelfläche von α, β, γ (diese in positiver Richtung gezählt) in A, B, C getroffen, dann ist $\cos AB = \cos(\alpha\beta)$, $\cos AC = \cos(\alpha\gamma)$, $\cos CB = \cos(\beta\gamma)$, also $\cos AC \cdot \cos CB = \cos AB$. Aus dieser Hauptgleichung werden jetzt sämtliche 6 Formeln des rechtwinkligen sphärischen Dreiecks mittelst der alten Methode der Ergänzung zum Quadranten abgeleitet und aus ihnen der Sinus- und Cosinussatz für schiefwinklige Dreiecke.[1]) Hierauf folgt die Einführung des Polardreiecks, d. h. des Systems der drei Pole ähnlich wie in der ersten Abhandlung von Möbius, und mit Hilfe desselben findet er den Cosinussatz für die Winkel und dann die Cotangentenformel durch Rechnung.

Nun werden diese für ein System von drei Punkten und die sie verbindenden Bögen bestehenden allgemeinen Formeln für den Fall eines eigentlichen sphärischen Dreiecks benützt. Die Bestimmung des Richtungssinnes eines Hauptkreisbogens wird hier dadurch vertreten, daß man angibt, welcher von den beiden durch die Punkte B und C bestimmten Bögen in Betracht gezogen werden soll. Wird z. B. die Peripherie des Dreiecks in der Pfeilrichtung in Fig. 38 durchlaufen, so ist $CB = a$, $AC = b$, $BA = c$, nicht etwa $360^0 - BC = a$ u. s. w. zu setzen. Um den Sinn der Winkel festzulegen, durchgehe man diese Peripherie auf der äußeren Kugelseite, nenne die Seite jedes der drei Bögen, welche hierbei zur Rechten (Linken) bleibt, die innere (äußere) und verstehe unter dem innern (äußern) Winkel bei A denjenigen, innerhalb dessen die innern (äußern) Seiten seiner zwei Schenkel AB und AC fallen; gleichnamige Winkel sind dann die drei innern oder die drei äußern.[2]) Unter diesen Voraussetzungen gelten jene Hauptformeln für alle Dreiecke mit Seiten und Winkeln zwischen 0^0 und 360^0.

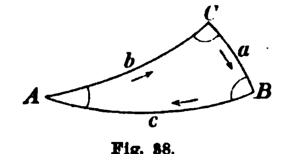


Fig. 38.

Möbius' Verallgemeinerung beruhte auf der Einführung und konsequenten Festhaltung des schon von Gauß als notwendig erkannten Richtungs- und Drehungssinnes. Desselben Mittels bediente

1) Etwas einfacher in der Ausdrucksweise, aber sonst ganz gleich ist Baltzers Darstellung: Elemente II, 314. —
2) Durchläuft man z. B. die Peripherie des Dreiecks ABC in Fig. 39 in der punktierten Linie, und ist $AB > 180^0$, $AC > 180^0$, $BC < 180^0$, dann ist $\sphericalangle A$ hohl, $\sphericalangle B$ und $\sphericalangle C$ sind erhaben und diese drei Winkel sind gleichnamig.

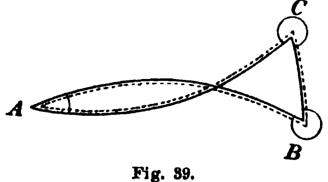


Fig. 39.

sich erheblich später, 1870, Otto Stolz (geb. 1842), Professor der Mathematik in Innsbruck, um eine exakte Ableitung der trigonometrischen Formeln aus der analytischen Geometrie zu erzielen.[1]) Zu diesem Zwecke orientierte er das zugrundegelegte rechtwinkige Koordinatensystem genau, führte einen positiven Drehungs- und Richtungssinn ein, definierte den Winkel zweier Ebenen durch den Winkel der positiven Normalen zu ihnen und bestimmte dann die Cosinus der Neigungswinkel, $\widehat{ab}$, $\widehat{bc}$, $\widehat{ca}$ dreier vom Koordinatenanfangspunkt O ausgehender positiver Richtungen a, b, c durch die Neigungscosinus dieser Richtungen. Desgleichen wurden die Cosinus der Winkel der drei Ebenen Oab, Obc, Oca durch die Neigungscosinus ihrer Normalen γ, α, β dargestellt. Die Elimination dieser Hilfsgrößen gab dann die Formel (I) $\cos\widehat{\gamma\alpha}\sin\widehat{ab}\sin\widehat{bc} = \begin{vmatrix} \cos\widehat{ab}, & \cos\widehat{ca} \\ 1\;\;, & \cos\widehat{bc} \end{vmatrix}$ und die beiden hieraus durch zyklische Vertauschung hervorgehenden. Aus diesen Formeln erhält man weiter (II) $\sin\widehat{ca}\sin\widehat{ab}\sin\widehat{\beta\gamma} = \sigma\sqrt{P}$,

$$\sigma = \pm 1,\quad P = \begin{vmatrix} 1, & \cos\widehat{ab}, & \cos\widehat{ca} \\ \cos\widehat{ab}, & 1, & \cos\widehat{bc} \\ \cos\widehat{ca}, & \cos\widehat{bc}, & 1 \end{vmatrix}.$$

(Zur Bestimmung von σ wird eine Regel angegeben.) Eine Kugel mit dem Radius 1 um O wird von den Richtungen a, b, c in A, B, C getroffen, und es ist $\widehat{bc} = BC$, $\widehat{ca} = CA$, $\widehat{ab} = AB$, jeder Bogen von dem zuerst geschriebenen Eckpunkte des Dreiecks in positiver Richtung gezählt; werden diese Richtungen mit $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ bezeichnet, so findet man $\widehat{\beta\gamma}$, $\widehat{\gamma\alpha}$, $\widehat{\alpha\beta}$ bezüglich gleich $\widehat{\mathfrak{bc}}$, $\widehat{\mathfrak{ca}}$, $\widehat{\mathfrak{ab}}$, wenn diese Winkel an der Außenseite der Kugel im positiven Drehungssinne abgelesen werden.

Aus der vollständigen Symmetrie der rechten Seite der Gleichung (II) inbezug auf die Seiten und Winkel des Dreiecks folgt dann nach Einführung der obigen Seiten und Winkel:

$$\frac{\sin\widehat{\mathfrak{bc}}}{\sin BC} = \frac{\sin\widehat{\mathfrak{ca}}}{\sin CA} = \frac{\sin\widehat{\mathfrak{ab}}}{\sin AB} = \frac{\sigma\sqrt{P}}{\sin BC \sin CA \sin AB},$$

und ferner geht (I) über in $\sin AB \sin BC \sin\widehat{\mathfrak{ca}} = \cos AB \cos BC - \cos CA$ (und ihre zyklisch verwandten Gleichungen). Damit[2]) sind

1) Zeitschrift für Mathem. und Phys. XVI, 1871, 168—178. — 2) Sollen die Formeln die gebräuchliche Gestalt annehmen, so hat man noch $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $\widehat{\mathfrak{bc}} = 180^\circ \mp A$, $\widehat{\mathfrak{ca}} = 180^\circ \mp B$, $\widehat{\mathfrak{ab}} = 180^\circ \mp C$ zu setzen, indem man Möbius' oben angeführte Regel beachtet.

die beiden Fundamentalformeln in vollster Allgemeinheit gewonnen, und die übrigen lassen sich aus ihnen durch algebraische Operationen ableiten, was noch gezeigt wird.

Von einem andern Gesichtspunkte ausgehend hat in der neuesten Zeit (1895) der Italiener J. Angelitti die allgemeine Begründung der trigonometrischen Formeln versucht, indem er an jene von uns S. 178 teilweise mitgeteilte Bemerkung von Gauß anknüpfte, die jener mit den Worten schloß, man könne auch durch eine Aufzählung aller Einzelfälle, also durch eine Art Induktion, zu dem gewünschten Resultat gelangen. Angelitti nimmt diese erschöpfende Abzählung vor, indem er die sphärischen Dreiecke in 8 Klassen einteilt, deren eine Hälfte die Dreiecke mit aufgelöstem Perimeter, die andere die Dreiecke mit verflochtenem Umfang enthält. Im ersten Falle unterscheidet er Dreiecke, deren Seiten und Winkel $< \pi$ sind, ferner Dreiecke, welche nur Seiten $< \pi$ haben, Dreiecke mit zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel $< \pi$ und endlich solche, bei denen zwei Seiten $< \pi$, der eingeschlossene Winkel aber $> \pi$ ist. Die zweite Hälfte bilden die Dreiecke mit zwei Seiten $> \pi$ und dem eingeschlossenen Winkel $< \pi$, ferner jene mit 2 Seiten und dem Zwischenwinkel $> \pi$, dann jene, in welchen die Seiten $> \pi$ und die Winkel $< \pi$ sind, und endlich die Dreiecke mit Seiten und Winkeln $> \pi$. Auf alle diese Fälle werden die Hauptformeln der Trigonometrie ausgedehnt, und zum Schlusse wird die Verwendbarkeit der so gewonnenen allgemein gültigen Gleichungen an einer Aufgabe der „Theoria motus“ nachgewiesen.[1])

Auch vom Standpunkte der Invariantentheorie wurde eine Ableitung der sphärischen Hauptformeln versucht, die ein allgemeines Interesse beanspruchen darf. Kyparissos Stephanos, Professor in Athen (geb. 1857), schlug hierbei folgenden Weg ein.[2]) Ausgehend von der Auffassung, daß man einerseits die metrischen Beziehungen der Figuren als projektivische Eigenschaften derselben inbezug auf den unendlich fernen imaginären Kugelkreis ansehen kann, während andererseits die Gleichungen der sphärischen Trigonometrie auf die Relationen zwischen den Seiten eines sphärischen Dreiecks und seines Polardreiecks hinauskommen, kann man das Problem der Kugeltrigonometrie auf die Bestimmung der Relationen zwischen den anharmonischen Verhältnissen zurückführen, die durch einen Kegelschnitt auf den Seiten zweier Dreiecke bestimmt werden, von denen

1) Vgl. das Referat über die in den Atti dell' Accademia Pontoniana 1895 erschienene Abhandlung Angelittis in der Fortschritten der Mathematik XXVI, 581—582. — 2) Bull. de la Société Mathém. de France 1882, X, 134—137.

das eine reziprok polar zu dem andern ist Sind nun α, β, γ die Seiten eines sphärischen Dreiecks und λ, μ, ν die seines Polardreiecks, und treffen die Ebenen durch den Kugelmittelpunkt und diese Seiten die unendlich ferne Ebene bezüglich in a, b, c; l, m, n, während der imaginäre Kugelkreis die Seiten der Dreiecke abc, lmn respektive in den Punktepaaren $a_x^2 = a_0 x_1^2 + 2a_1 x_1 x_2 + a_2 x_2^2$, b_x^2, c_x^2 und in l_x^2, m_x^2, n_x^2 schneidet, so entsprechen die Fundamentalformeln der sphärischen Trigonometrie den Relationen, welche die simultanen Invarianten des Systems der drei binären Formen a_x^2, b_x^2, c_x^2 mit dem kovarianten System $l_x^2 = (bc)\, b_x c_x = (b_0 c_1 - b_1 c_0)\, x_1^2 + (b_0 c_2 - b_2 c_0)\, x_1 x_2 + (b_1 c_2 - b_2 c_1)\, x_2^2$, $m_x^2 = (ca)\, c_x a_x$, $n_x^2 = (ab)\, a_x b_x$ verbinden. Die Invarianten des ersten Systems sind aber in der bekannten symbolischen Bezeichnungsweise von Clebsch $D_{11} = (aa')^2$, $D_{22} = (bb')^2$, $D_{33} = (cc')^2$, $D_{23} = (bc)^2$, $D_{31} = (ca)^2$, $D_{12} = (ab)^2$ und $R = \Sigma \pm a_0 b_1 c_2$; bezeichnet man die entsprechenden Invarianten des zweiten Systems mit d_{ik}, r, so liefert der angeführte Zusammenhang beider Systeme unmittelbar Relationen zwischen den D_{ik} und den d_{ik} $(r = R^2)$, und wenn man in diese endlich die Werte $\cos\alpha = D_{23} : \sqrt{D_{22} D_{33}}$, $\cos\beta = D_{31} : \sqrt{D_{33} D_{11}}$, $\cos\gamma = D_{12} : \sqrt{D_{11} D_{22}}$, $\sin\alpha = \sqrt{2 d_{11}} : \sqrt{D_{22} D_{33}}$ u. s. w. und die entsprechenden für $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ in den d_{ik} einführt, geben sie unmittelbar die gesuchten Fundamentalformeln. So liefert z. B. die Beziehung $d_{23} = \frac{1}{2}(D_{12} D_{31} - D_{11} D_{23})$ den Cosinussatz für die Seiten.[1])

§ 3. Systematischer Ausbau der trigonometrischen Formeln.

Am Ende des 18. Jahrhunderts war man so ziemlich im Besitze aller für praktische Zwecke notwendiger oder nützlicher Formeln; was also in der Folgezeit hinzukam, diente weniger der Anwendung als dem Ausbau der Trigonometrie nach der theoretischen Seite hin. So hatte selbst Delambre, der praktische Astronom, die letztere Richtung im Auge, als er 1807[2]) die bekannten, nach ihm zu benennenden Relationen zwischen den 6 Stücken eines sphärischen Drei-

---

1) Vgl. hierzu: Felix Klein, Über die hypergeometrische Funktion, Vorlesung, Winter 1893/94. Ausgearbeitet von E. Ritter, Göttingen 1894. — 2) In Connaissance de temps für 1809, 445, publiziert im April 1807, daselbst gab er auch noch die Formeln $\sin b \cos\frac{A+C}{2} \cos\frac{A-C}{2} = \sin(a+c)\sin^2\frac{B}{2}$ und $\sin b \sin\frac{C-A}{2} \sin\frac{C+A}{2} = \sin(c-a)\cos^2\frac{B}{2}$. — Über die Geschichte der Delambreschen Formeln siehe Todhunter in The London, Edinburgh and Dublin Philosoph. Magazine XLV, Serie 4, 1873, 98.

ecks gab, die dann ein Jahr darauf auch Mollweide[1]) und 1809 Gauß[2]) ebenfalls entwickelten.

Der letztere glaubte allerdings in ihrer rechnerischen Verwendung gegenüber den Neperschen Analogieen Vorteile zu erblicken und hat sie daher vielfach benützt, Delambre dagegen bestritt diese Ansicht.[3]) Vom geschichtlichen Standpunkt bieten die Formeln insofern Interesse, als sie nach Cagnolis bekannter Relation (S. 141) die ersten Formeln sind, die für alle 6 Dreiecksstücke angegeben wurden. Delambre hatte sie zuerst ohne Beweis veröffentlicht, dann aber in seiner Astronomie 1814 sowohl eine analytische als auch eine geometrische Ableitung derselben gegeben[4]), während Mollweide sie nur rechnerisch begründete, wie auch die beiden unrechtmäßigerweise nach ihm benannten Gleichungen der ebenen Trigonometrie. Als die Re-

---

1) In Zachs Monatliche Correspondenz XVIII, 1808, 394, ein und ein halbes Jahr nach Delambre, jedoch ist sein Beweis der erste, der publiziert wurde. — 2) In „Theoria motus corporum coelestium" 1809, Nr. 54. Ein Beweis, den Gauß in seinen Vorlesungen mitteilte, soll bei Wittstein, Lehrbuch der Elementarmathematik II, 1862 stehen. Im VIII. B. seiner Werke 289—291 ist ein solcher angegeben, den er in einem Briefe vom 18. Februar 1815 Gerling mitteilte. Darin entwickelt er aus den 5 Hauptgleichungen der sphärischen Trigonometrie zunächst die Relationen 1) $PQ = qs$, 2) $RS = pr$, 3) $PS = qr$, 4) $QR = ps$, 5) $PR = pq$, 6) $QS = rs$, wo $P = \cos\frac{A}{2}\cos\frac{b-c}{2}$, $Q = \cos\frac{A}{2}\sin\frac{b-c}{2}$, $R = \sin\frac{A}{2}\cos\frac{b+c}{2}$, $S = \sin\frac{A}{2}\sin\frac{b+c}{2}$; $p = \cos\frac{a}{2}\cos\frac{B+C}{2}$, $q = \cos\frac{a}{2}\sin\frac{B+C}{2}$, $r = \sin\frac{a}{2}\cos\frac{B-C}{2}$, $s = \sin\frac{a}{2}\sin\frac{B-C}{2}$. Es folgt dann aus $\frac{1\times 3}{6} = \frac{1\times 5}{4} = \frac{3\times 5}{2}$ $P^2 = q^2$, und hieraus notwendig $P = +q$, „insofern man nur Dreiecke betrachtet, wo Seiten und Winkel nicht über 180° hinausgehen". Dann hat man ohne weiteres $Q = +s$, $R = +p$, $S = +r$, welches zusammen die vier gewünschten Sätze sind. In Gauß' Werken VII, 282 steht eine handschriftliche Bemerkung, in welcher noch eine andere ähnliche Formelgruppe angegeben ist. Bezüglich der Zeichenbestimmung siehe Study, Abhandl. der sächs. Gesellsch. d. W. XX. 1893, 128, Anm. 2. — 3) Connaissance de temps für 1812, 349. — 4) A. a. O. 160—163 und 165. Auch gibt er eine geometrische Ableitung der Neperschen Analogieen, 188, die Gerono in Nouv. Ann. II, 1843, 222 etwas vereinfacht hat. Übrigens hatte schon Mollweide 1809 in Zachs Monatliche Correspondenz XIX, 425 eine Ableitung dieser Analogieen mittelst stereographischer Projektion gegeben und später (1855) gab J. A. Serret eine ebensolche: Des méthodes en Géométrie. Chap. 25. Analytische Ableitungen wurden natürlich in großer Anzahl veröffentlicht, einfach ist die von Wallace, Cambridge and Dublin math. Journal 1843, 96 gegebene. Delambres geometrische Ableitung wurde später wieder von Crofton als neu mitgeteilt: Proceedings of the London math. Society III, 1871, 13.

lationen einmal bekannt waren, folgten Beweise in großer Menge und von den verschiedensten Gesichtspunkten ausgehend nach, die sich auch vielfach ganz oder zum Teile wiederholten. Ohne uns hier auf Einzelheiten einlassen zu können, führen wir unten die Literatur hierüber in der Hauptsache an.[1])

Außer Cagnolis und Delambres Gleichungen zwischen den 6 Stücken eines sphärischen Dreiecks wurden damals noch einige andere aufgefunden. So hinterließ Gauß in einer handschriftlichen Bemerkung[2]) die wichtigen Beziehungen:

$$\sin A \sin b \sin c = \sin B \sin c \sin a = \sin C \sin a \sin b$$

$$= -4 \cos S \cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2} = 4 \cos (S - A) \cos \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \sin \frac{c}{2}$$

$$= 4 \cos (S - B) \sin \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \sin \frac{c}{2} = 4 \cos (S - C) \sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}$$

$$= 4 \operatorname{ctg} r \sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \sin \frac{c}{2} = 4 \cos r \sin \alpha \sin \frac{b}{2} \sin \frac{c}{2} = \text{u. s. w.},$$

wo α, β, γ die Winkel des ebenen Dreiecks ABC sind und r der sphärische Radius des dem Dreieck umschriebenen Kreises ist. — Aus diesen Gleichungen, die in enger Beziehung zu denen von Schmeißer stehen (S. 182), hat Gauß die Delambreschen Gleichungen abgeleitet. Auch sind die Polarformen der hier vorkommenden Produkte bis auf den Faktor 2 dieselben, welche später Staudt unter

---

1) Servois Annales de Mathém. II, 1811, 84—88 (Ableitung aus den beiden Cosinusformeln). — Gergonne ebenda III, 1812, 348 (wohl die eleganteste rechnerische Ableitung aus dem Additionstheorem und den Halbwinkelsätzen). Sorlin ebenda XV, 1825, 283 (wenig verschieden von der vorigen). Buzengeiger, Lindenaus Zeitschrift für Astr. VI, 1818, 316 und Bretschneider, Journal für Mathem. XIII, 88 haben den gleichen Beweis. Sniadecki, Sphärische Trigonometrie, deutsch 1828 von Feldt, und Feldt selbst in Journal für Mathem. VII, 1831, 68. Moth gewann sie 1829 aus seinen umfassenden Formelsystemen (S. 180, Anm. 2). Vgl. ferner Schmeißer, Journal für Mathem. X, 1833, 129. Crelle, ebenda XII, 1834, 348. Gudermann, Sphärik 1835, 96 (wenig verschieden von Delambres geometrischem Beweis, den Crofton reproduzierte). Paucker (eleganter geometrischer Beweis) in: die Gaußschen Gleichungen etc., Milau, 1844. Puissant, Géodésie 1842, 86. F. Arndt, Archiv für Mathem. XIII, 159. Grunert, ebenda XVII, 259. Essen, Archiv für Mathem. XXVII, 38 (diesen geometrischen Beweis hat Baltzer in seine Elemente aufgenommen, Aufl. von 1878, 320). Unferdinger (rechnerische Ableitung), Archiv für Mathem. XXVI, 436 und XXVII, 300. Chartres, Nature 40, 1889, 644 (kurzer Beweis aus den Neperschen Analogieen). Durège, Theorie der elliptischen Funktionen, Leipzig 1868, 122—124, Ableitung aus dem Additionstheorem dieser Funktionen. — 2) Opera IV, 404. Gauß schreibt statt $2S = A + B + C$.

dem Namen „Eckensinus" einführte[1]) und die Junghann zur Grundlage seiner „Tetraëdrometrie" Gotha 1862/63 machte. Gauß bemerkte auch schon, daß durch sie der sechsfache Inhalt der Pyramide gegeben ist, deren Ecken die drei Winkelpunkte des Dreiecks und der Mittelpunkt der Kugel bilden.

Delambre gab noch die neue Relation zwischen den 6 Stücken des Dreiecks:

$$\sin C \sin c = (\operatorname{tg} B \cos A + \sin A \cos c)(\operatorname{tg} a \cos b - \sin b \cos C)^{2}),$$

Gudermann, Bretschneider und andere leiteten aus den Halbwinkelsätzen leicht zu erhaltende Beziehungen ab, und Moth, der 1829 aus seinen Relationen wohl das vollständigste System von Formeln gewonnen hatte, gab die Gleichungen zwischen den Funktionen der vierten Teile der Winkel und Seiten. Grunert[3]) teilte 1853 die Formel

$$\frac{\sin(b-c)}{\sin a}\cos^2\frac{A}{2} + \frac{\sin(c-a)}{\sin b}\cos^2\frac{B}{2} + \frac{\sin(a-b)}{\sin c}\cos^2\frac{C}{2} = 0$$

mit, und endlich erhielt J. A. Serret in seinem Traité de trigonométrie (4. Aufl. 1868) aus den Delambreschen Gleichungen durch korrespondierende Addition und Subtraktion vier Relationen von dem Typus $\operatorname{tg}^2\frac{C-c}{4} = \operatorname{tg}\frac{S+d}{4}\operatorname{tg}\frac{S-d}{4}\operatorname{tg}\frac{s+D}{4}\cdot\operatorname{tg}\frac{s-D}{4}$, wo $A+B = 180^0 + S$, $a+b = 180^0 + s$, $A-B = D$, $a-b = d$ ist.[4])

Boten die angeführten Gleichungen hauptsächlich nach der theoretischen Seite hin Interesse, so war die elegante Formel, welche L'Huilier nach Angabe Legendres[5]) zur Berechnung des sphärischen Exzesses aus den drei Dreiecksseiten zuerst aufstellte, und die jetzt allgemein seinen Namen erhalten hat, auch von praktischer Bedeutung. Auch diese Relation: $\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{4} = \sqrt{\operatorname{tg}\frac{s}{2}\operatorname{tg}\frac{s-a}{2}\operatorname{tg}\frac{s-b}{2}\operatorname{tg}\frac{s-c}{2}}$ wurde nachher unzähligemale abgeleitet und bewiesen.[6]) Die eleganteste

1) Journal für Mathem. XXIV, 1842, 252 und Nr. 8, 255—256. — 2) Astronomie I, 155. — 3) Archiv für Mathem. XX, 473. — 4) Die anderen drei ähnlichen Formeln drücken $\operatorname{tg}^2\frac{C+c}{4}$ und $\operatorname{tg}^2\left(45^0 + \frac{C \mp c}{4}\right)$ aus (p. 156). — Zu ganz ähnlichen Relationen gelangte A. Ziegler 1870, Archiv für Mathem. LV, 1873, 221—224. — 5) Géométrie. Note 10. Eine viel kompliziertere Relation zwischen ε und den drei Dreiecksseiten hat Armand Hue 1851 in Nouv. Ann. X, 25—27 gegeben, und Grunert bewies dieselbe im Archiv für Mathem. XVI, 483. — 6) Vgl. z. B. Legendre a. a. O., Gudermann in seiner Sphärik 1835, 121, Moth in seinen Relationen 1829, 22 Nr. 23, Lobatto, Archiv für Mathem. XXXIX, 1862, 240, Gent, Programm der Ritterakademie zu Liegnitz, Ostern 1853, auch Archiv XX, 358, E. Bacaloglo, ebenda XXXVIII, 1862, 220—224 mit Bemerkungen von Grunert, ferner Serret, „Des méthodes

rechnerische Ableitung ist die von Lobatto herstammende, der sie aus zwei der Delambreschen Gleichungen durch korrespondierende Addition und Subtraktion erhielt, die einfachste geometrische aber jene, die Serret mit stereographischer Projektion gab.

Weniger brauchbar ist die Formel

$$\sin\frac{A+B+C}{2} = \frac{\cos^2\frac{a}{2}+\cos^2\frac{b}{2}+\cos^2\frac{c}{2}-1}{2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}$$

und die entsprechenden für $\sin\frac{A+B-C}{2}$ u. s. w., die sich in Gudermanns Sphärik finden. Dieses Werk dürfte übrigens nach Delambres Astronomie von 1814 die reichhaltigste Formelsammlung enthalten, die in der ersten Hälfte des vergangenen Jahrhunderts erschien. Wir erwähnten schon früher, daß sich Gudermann die Aufgabe gestellt hatte, sein Formelsystem möglichst geometrisch zu entwickeln, und darin zeigte er auch in der Tat eine erstaunliche Gewandtheit. Dennoch verschmähte er auch die algebraische Formelkombination sowenig wie Delambre, und gelangte so zu einer Menge

---

en géométrie" 1855, Werner, Zeitschrift für Mathem. und Phys. VI, 1861, 146—149, Ligowski, Archiv für Mathem. LVIII, 96 — der Ableitungen in den Lehrbüchern nicht zu gedenken. Die L'Huiliersche Formel ist übrigens nur ein spezieller Fall der von Lexell für das sphärische Viereck bereits abgeleiteten: Acta Acad. Petrop. 1782 pars 1, 88 (siehe S. 137). In dem oben erwähnten Traité de Trigonométrie 160—161 hat Serret zur L'Huilierschen Formel noch folgende Ergänzungen gegeben:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{A}{2}-\frac{\varepsilon}{4}\right)=\sqrt{\operatorname{ctg}\frac{s}{2}\operatorname{ctg}\frac{s-a}{2}\operatorname{tg}\frac{s-b}{2}\operatorname{tg}\frac{s-c}{2}}, \text{ etc.}$$

und

$$\operatorname{ctg}\frac{s}{2}=\sqrt{\operatorname{ctg}\frac{\varepsilon}{4}\operatorname{tg}\left(\frac{A}{2}-\frac{\varepsilon}{4}\right)\operatorname{tg}\left(\frac{B}{2}-\frac{\varepsilon}{4}\right)\operatorname{tg}\left(\frac{C}{2}-\frac{\varepsilon}{4}\right)}$$

und die analogen für $\operatorname{ctg}\frac{s-a}{2}$ etc. Übrigens stehen diese Formeln in etwas anderer Gestalt auch schon bei Moth (Nr. 23). Casey hat vorgeschlagen, den Ausdruck

$$L=\sqrt{\operatorname{ctg}\frac{s}{2}\operatorname{tg}\frac{s-a}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{s-b}{2}\operatorname{tg}\frac{s-c}{2}}$$
$$=\sqrt{\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{4}\operatorname{tg}\left(\frac{A}{2}-\frac{\varepsilon}{4}\right)\operatorname{tg}\left(\frac{B}{2}-\frac{\varepsilon}{4}\right)\operatorname{tg}\left(\frac{C}{2}-\frac{\varepsilon}{4}\right)}$$

„L'huilierian" zu nennen, welche Bezeichnung auch in Todhunters „Spherical Trigonometry", neueste Aufl. 1901, 102, Eingang gefunden hat. — Die symmetrische Bezeichnung, womit diese „L'Huilierschen Formeln" ihre eleganteste Gestalt annehmen, findet sich bei Study, Abhandl. der k. Sächsischen Gesellsch. der W. XX, 1893, 130, siehe weiter unten.

teilweise neuer Relationen. So z. B. gab er die Beziehungen zwischen den Umfängen und Inhalten eines sphärischen Dreiecks und seiner drei Nebendreiecke[1]), die Beziehungen der Seiten oder Winkel, des Umfanges und der Fläche eines Dreiecks zu den Radien der diesem und seinen Nebendreiecken umschriebenen oder eingeschriebenen Kreise u. s. w. Gudermanns Formelsysteme hat dann später Franz Unferdinger[2]) (1833—1890) in mehreren Abhandlungen teils vervollständigt, teils durch neue ergänzt, in welchen er die Relationen zwischen den Seiten, den Höhen[3]) und den Radien[4]), zwischen den Mittelpunktsabständen des ein- und der umgeschriebenen Kreise einführte.[5]) Zugleich leitete er auch durch Grenzübergang aus seinen sphärischen Formeln die entsprechenden für das ebene Dreieck ab und suchte nach Analogieen zwischen ebenen und sphärischen Formeln, wozu ihm namentlich das rechtwinklige sphärische Dreieck diente, in welchem ein Winkel gleich der Summe der beiden andern ist.[6]) In Unferdingers Arbeiten ist die fast unerschöpfliche Menge von Relationen, welche sich darbieten, sobald man noch andere Stücke als Winkel und Seiten des Dreiecks zu bestimmenden Elementen wählt, in übersichtlicher und eleganter Weise entwickelt und gruppiert.

---

1) Sind z. B. $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die Tangenten der Radien der den Nebendreiecken und dem Hauptdreieck bezüglich umschriebenen Kreise und $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ die Cotangenten der Radien der eingeschriebenen, so sind einige dieser Relationen $\operatorname{tg}\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\alpha\delta}{\beta\gamma}}$, $\sin\frac{\Delta}{2} = \sqrt{\frac{\delta}{\alpha\beta\gamma}}$, $\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\beta'\gamma'}{\alpha'\delta'}}$, $\sin\frac{U}{2} = \sqrt{\frac{\delta'}{\alpha'\beta'\gamma'}}$, $\alpha' = \frac{1}{2}(\beta + \gamma + \delta - \alpha)$ u. s. w. — 2) Archiv für Mathem. XXIX, 1857, 238 ff., XXXIII, 1859, 14—88, XLII, 1864, 453—466, ferner Auflösung des sphärischen Dreiecks durch seine drei Höhen in Sitzungsber. der Wiener Akademie LI, 1865 und Formeln der sphärischen Trigonometrie, ebenda LVIII. — 3) Vgl. auch Skrivan, der im Archiv für Mathem. XXVIII, 1857, 471 die Berechnung des sphärischen Dreiecks aus seinen 3 Höhen gab. — 4) Die Bestimmung der Radien der äußeren Berührungskreise aus den Dreiecksseiten gab schon Sorlin, Annales de Math. XV, 1825, vorgelegt 1819. — 5) Eine Relation zwischen den Radien r und ϱ und dem Abstand der Mittelpunkte des um- und eingeschriebenen Kreises haben schon L'Huilier und Durand in Annales de Mathém. I, 1810, 144 und XIV, 1823, 59 gegeben, Unferdinger aber entwickelte eine ganze Reihe von Beziehungen der Abstände d, d_1, d_2, d_3 der Mittelpunkte der 4 Berührungskreise von dem des eingeschriebenen, Gleichungen, aus denen wir nur die eine $\frac{\cos d}{\sin\varrho} = \frac{\cos d_1}{\sin\varrho_1} + \frac{\cos d_2}{\sin\varrho_2} + \frac{\cos d_3}{\sin\varrho_3}$ hervorheben, welche für die Ebene direkt in die bekannte Relation $\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} + \frac{1}{\varrho_3}$ übergeht; vgl. auch Booth, A treatise on some new geometrical Methods, London 1877, II, 288—299. — 6) Archiv für Mathem. LII, 1871, 344—349. Dasselbe Dreieck behandelt wieder R. E. Allardice, Proceedings of the Edinburgh Mathem. Society II, 1884, 53—54.

Wir wollen hier auch noch kurz der zuerst von Gudermann 1830[1]) und dann unabhängig von ihm durch Ch. Graves[2]) 1841 und A. Borgnet[3]) entwickelten analytischen Behandlung sphärischer Figuren gedenken, bei welcher zwei zueinander senkrechte größte Kreise als Koordinatensystem auf der Kugel gewählt wurden, während die einen Punkt bestimmenden Koordinaten entweder direkt durch Länge und Breite desselben oder durch die trigonometrischen Tangenten der auf den Axen liegenden Bögen gemessen wurden, die zwei durch den Punkt senkrecht zu jenen gelegte Kreise ausschneiden. Aus dieser Auffassung ist eine analytische Geometrie auf der Kugelfläche entstanden, die eine reiche Literatur im Gefolge hatte. Doch können wir hier auf dieselbe nicht weiter eingehen, da sie wie die durch Schulz, Gudermann, Möbius und andere entwickelten projektiven Formeln einer Geschichte der Kugelgeometrie angehört.

Eine andere Richtung schlug Bretschneider in einer Abhandlung von 1842 ein[4]), indem er zwei Dreiecke in der Ebene sowohl als auf der Kugel zueinander in Beziehung setzte. Für die ebenen Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ ergaben sich ihm hierbei 12 Fundamentalformeln von der Gestalt:

$$a^2a_1^2+b^2b_1^2-2aa_1bb_1\cos(C\pm C_1)=a^2c_1^2+b_1^2c^2-2ab_1cc_1\cos(B\pm A_1).$$

Aus diesen Gleichungen wurden dann spezielle abgeleitet, sei es, daß die Dreiecke als ähnlich vorausgesetzt wurden, sei es daß sie eine oder mehrere Seiten gleich hatten. Für die sphärischen Dreiecke wurden 6 Grundformeln gewonnen von der Gestalt:

$$\begin{aligned}&\cos a\cos a_1\pm\sin a\sin a_1\cos C\cos C_1\\&=\cos(b\mp b_1)\cos c\cos c_1\mp\sin c\sin c_1\cos A\cos A_1,\end{aligned}$$

aus denen sich wieder spezielle Formeln entwickeln ließen, die eine Reihe von Relationen zwischen den Kanten und Flächenwinkeln eines Tetraeders ergaben, während die Fundamentalformeln der Ebene zur Behandlung des ebenen Vierecks dienlich waren.

Auch die Theorie der elliptischen Funktionen wurde zur Bildung von Formelsystemen für das sphärische Dreieck herbeigezogen. Schon Lagrange[5]) bemerkte 1799, bei Gelegenheit der Integration der

---

1) Journal für Math. VI, 244—254 und Grundriß der analytischen Sphärik, Köln 1830, 8°. — 2) Anhang an: Two geometrical memoirs etc. of Mr. Chasles 1841. — 3) Essai de Géométrie analytique de la sphère, 1847, 8°. Vgl. dazu Nouvelles Ann. VII, 1848, 147—150, 174—177 und 392—395. — 4) Archiv für Mathem. II, 132. Vgl. zu dieser Materie eine Relation von J. Steiner 1827 im Journ. für Mathem. II, 190. — 5) Théorie des fonctions analytiques. Journal de

elliptischen Differentialgleichung: $\frac{da}{\sqrt{1-k^2\sin^2 a}} - \frac{db}{\sqrt{1-k^2\sin^2 b}} = 0$, die Ähnlichkeit des Integrals $\cos\vartheta = \cos a \cos b + \sin a \sin b\sqrt{1-k^2\sin^2\vartheta}$ mit der Cosinusformel der sphärischen Trigonometrie, in welche jene übergeht, wenn man mit a, b, c die Seiten und mit A, B, C die Winkel eines sphärischen Dreiecks bezeichnet, den Modulus k gleich dem konstanten Sinusverhältnis $\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}$ und $\vartheta = c$ setzt. Durège[1]) hat dann die Form dieses sphärischen Dreiecks einer näheren Betrachtung unterzogen, aber zur Bildung neuer Formelsysteme wurde der Gedanke erst 1880 durch Kleiber[2]) ausgenützt. Dieser, ein Schüler Richelots, leitete aus dem Additionstheorem der Thetafunktionen mit vier Argumenten eine Menge von Relationen zwischen den elliptischen Funktionen Jacobis ab, und bewies den Satz, „daß wenn man der Reihe nach $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{sn} v$, $\operatorname{sn}(u-v)$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{cn} v$, $\operatorname{cn}(u-v)$, $\operatorname{dn} u$, $\operatorname{dn} v$, $\operatorname{dn}(u-v)$ durch $\sin a$, $\sin b$, $\sin c$, $\cos a \cos b$, $\cos c$, $-\cos A$, $\cos B$, $\cos C$ ersetzt, aus jeder Formel über elliptische Funktionen eine solche für ein sphärisches Dreieck mit einem stumpfen und zwei spitzen Winkeln hervorgeht, bei welchem, im Falle $\pi > A > \frac{\pi}{2} > B > C$ ist, $\operatorname{tg}\frac{C}{2} > \pm \frac{\cos\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}}$ sein muß" ($\pm$ je nachdem $A + B \lessgtr \pi$ ist).[3]) Hierdurch erhielt er auch einige neue Formeln, die theoretisches Interesse beanspruchen können.

Die Resultate der neuern mathematischen Forschung suchte auch Franz Wilhelm Meyer für die sphärische Trigonometrie zu verwerten in einer Abhandlung: „Der Resultantenbegriff in der sphärischen Trigonometrie" 1895.[4]) Indem er nämlich den Cosinussatz in

---

l'École Polytechnique III, cah. 9, Nr. 80, 81 und Nouvelle édition: Paris 1813, Nr. 69, 70. Oeuvres de Lagrange IX, 134—139.

1) Theorie der elliptischen Funktionen, Leipzig 1868, § 31. — 2) Programm des Kneiphöfischen Gymnasiums zu Königsberg 1880 und 1881. — 3) Denselben Satz bewies ein Jahr später wieder J. W. L. Glaisher im Quarterly Journal XVII, 353—364. Ferner beziehen sich noch auf den Zusammenhang der elliptischen und Kreisfunktionen zwei Notizen von W. Woolsey Johnson, ebenda XVIII, 1882, 365—370 und XIX, 1883, 185—188, ferner eine Notiz von Robert Russell, XX, 1884, 378—383, eine geometrische Darstellung der Landenschen Transformation von K. H. Schellbach, Journal für Math. XCI, 1881, 347—348, und endlich eine Erweiterung der Betrachtungen von Lagrange und Kleiber durch E. Study, auf die wir weiter unten im Texte noch eingehen. Vgl. auch Greenhill: The Applications of the Elliptic Functions, London 1892, Cap. IV, 131—141. Doch haben diese Arbeiten mehr den umgekehrten Zweck der Förderung der Theorie der elliptischen Funktionen im Auge. — 4) Journal für Math. CXV, 209—220.

der Form schrieb: $\cos a_i - \cos a_k \cos a_l - \sin a_k \sin a_l \cos \alpha_i \equiv 2 A_i = 0$, $i, k, l = 1, 2, 3$ und die a und α als komplexe Größen auffaßte, führte er die Aufgabe durch, die wichtigsten Formeln $G(a, \alpha) = 0$ der sphärischen Trigonometrie als rationale oder irrationale Funktionen der A_i darzustellen, mit Koeffizienten, die nur noch von den Seiten abhängen. Alle solche Funktionen G müssen natürlich gleichzeitig mit den A_i verschwinden und liefern in diesem Falle wieder die bekannten trigonometrischen Relationen. So enthält z. B. die Identität $\sin^2 a_l B_l \equiv A_k^2 - A_i^2 - (A_k L_k - A_i L_i)$, wo $L_i \equiv \cos a_i - \cos a_k \cos a_l$ und $4 B_l \equiv \sin^2 \alpha_i \sin^2 a_k - \sin^2 \alpha_k \sin^2 a_i$ ist, unter jener Voraussetzung den Sinussatz $\sin \alpha_k \sin a_i = \sin \alpha_i \sin a_k$. Als solche durch die A_i darzustellende Formen werden außer B_l die Form

$$2 C_{ik} \equiv \cos a_i \sin a_l - \sin a_k \cos \alpha_i - \sin a_i \cos a_l \cos \alpha_k,$$

welche $\sin a_l C_{ik} \equiv A_i + A_k \cos a_l$ gibt und die 12 Formen:

$$E_{i1} \equiv \sin^2 \frac{a_i}{2} \cos^2 \frac{\alpha_k - \alpha_l}{2} - \sin^2 \frac{\alpha_i}{2} \sin^2 \frac{a_k + a_l}{2},$$

$$E_{i2} \equiv \cos^2 \frac{a_i}{2} \cos^2 \frac{\alpha_k + \alpha_l}{2} - \sin^2 \frac{\alpha_i}{2} \cos^2 \frac{a_k + a_l}{2},$$

$$E_{i3} \equiv \sin^2 \frac{a_i}{2} \sin^2 \frac{\alpha_k - \alpha_l}{2} - \cos^2 \frac{\alpha_i}{2} \sin^2 \frac{a_k - a_l}{2},$$

$$E_{i4} \equiv \cos^2 \frac{a_i}{2} \sin^2 \frac{\alpha_k + \alpha_l}{2} - \cos^2 \frac{\alpha_i}{2} \cos^2 \frac{a_k - \alpha_l}{2}$$

genommen, die den Delambreschen Gleichungen entsprechen und $E_{i1} + E_{i3} \equiv - A_i$, $E_{i2} + E_{i4} \equiv A_i$ liefern, woraus sofort die numerische Identität $E_{i1} + E_{i2} + E_{i3} + E_{i4} \equiv 0$ folgt. Allgemein erhält man rein numerische Identitäten, die also die Seiten a_i nicht mehr enthalten, wenn man statt der C_{ik} die Größen $C'_{ik} = \frac{C_{ik}}{\sin a_l}$ einführt. So stellt sich z. B. A_i durch die rein numerische Identität dar:

$$A_i (C'_{ik} C'_{kl} C'_{li} - C'_{ki} C'_{il} C'_{lk})$$
$$\equiv (C'^2_{kl} - C'^2_{lk}) C'_{ki} C'_{li} + (C'^2_{li} - C'^2_{il}) C'_{ki} C'_{lk} + (C'^2_{ik} - C'^2_{ki}) C'_{li} C'_{kl}.$$

In einer Notiz „Über volle Systeme in der ebenen Trigonometrie“[1]) hat Meyer ferner als Grenzfall der obigen Betrachtungen den Satz nachgewiesen, daß sich die Formeln der Trigonometrie des ebenen Dreiecks vermöge der Formeln des Cosinussatzes ($2 A_i \equiv a_k^2 + a_l^2 - a_i^2 - 2 a_k a_l \cos \alpha_i$) und des Projektionssatzes ($B_i \equiv a_i - a_k \cos \alpha_l - a_l \cos \alpha_k$) mit nur numerischen Koeffizienten darstellen lassen, indem einerseits jede algebraische Funktion der A_i, B_i, die mit denselben zugleich verschwindet, eine Formel dieser Trigono-

1) Jahresbericht der Mathematikervereinigung für 1896, V, 61—62.

metrie darstellt, und sich andererseits jede solche Formel mit Hilfe der Gleichungen $a_i = \frac{A_k + A_l}{B_i}$ und $\cos \alpha_i = \frac{a_k^2 + a_l^2 - a_i^2 - 2A_i}{2a_k a_l}$ in die Form einer algebraischen Funktion der A und B bringen läßt.[1])

Wir wissen, daß schon Vieta die sechs Dreiecksfälle zu zweien gruppiert hatte, indem er erkannte, daß sie mit den zueinander polaren Formeln lösbar sind, doch wurde die in der ganzen sphärischen Trigonometrie herrschende Polarität erst durch Sorlin 1825[2]) ausdrücklich betont; auch finden wir bei ihm das Prinzip der zyklischen Vertauschung zum erstenmal präzis ausgesprochen.[3])

Ferner ist noch zu erwähnen, daß, was schon aus Möbius' Schriften zu ersehen war, die sphärischen Formelsysteme durch Einführung der Außenwinkel an Stelle der innern Winkel des Dreiecks an Symmetrie gewinnen. Auf diese Tatsache scheinen Cornelius Keogh und V. A. Lebesgue[4]) 1853, E. W. Grebe[5]) und H. Grassmann[6]) 1862 wieder selbständig aufmerksam geworden zu sein. Sie hoben hervor, daß wenn man die Supplemente der Winkel mit A, B, C bezeichnet, der Übergang zu den Polarformeln einfach durch Vertauschung dieser Winkel mit den Seiten erreicht wird. Auch betonten die beiden ersten und später (1870) wieder Ziegler[7]) den Vorteil, den die Benützung der Nebendreiecke (Außendreiecke, wie sie Ziegler nennt) bei der Ableitung der Formeln gewährt, indem sie die Einheitlichkeit der Formelgruppen erkennen läßt — die Methode ist keine andere, als Vietas „Inversio κατ' ἀναπλήρωσιν" (Tl. I, S. 183).

Alle im Laufe der Zeit entstandenen Ideen über die Schaffung oder die vorteilhafteste Anordnung und Gruppierung der sphärischen Formelsysteme, wie sie uns bei den im Vorhergehenden genannten Autoren entgegentraten, entbehrten aber eines leitenden Prinzipes, das erst die neuere Zeit bringen konnte, nachdem sich der Gruppenbegriff allmählich entwickelt und seine zentrale Stellung in der Mathematik namentlich durch die Arbeiten von Felix Klein (geb. 1849) und seinen Schülern erhalten hatte. Unbewußt hatten sich, wie wir sahen, schon Neper und Lambert desselben zur Zusammenfassung der 10 Formeln des rechtwinkligen sphärischen Dreiecks bedient, und Vietas beide Methoden des Überganges zu Neben- und reziproken

1) Vgl. auch die schon S. 178 Anm. 4 zu S. 172 angeführte Notiz desselben Verfassers. — 2) Annales de Math. XV, 278 und 302. Das Mémoire wurde bereits 1819 der Akademie vorgelegt. Vgl. auch Chasles Geschichte der Geometrie 234. — 3) A. a. O. 279. — 4) Nouv. Annales XII, 304 ff. — 5) Archiv für Mathem. XXXIX, 226—229. — 6) Die Ausdehnungslehre, Berlin 1862, 213 Anm. — 7) Siehe S. 195 Anm. 4.

Dreiecken fallen ebenfalls unter diesen Begriff. Aber den Gruppenbegriff als oberstes Prinzip zur theoretischen Behandlung der sphärischen Trigonometrie aufgestellt zu haben, ist das Verdienst Emil Studys, der 1893 hierüber eine umfangreiche Arbeit veröffentlichte[1]), die eine Menge neuer Ausblicke bietet.

Wir wissen, daß schon Möbius durch Einführung eines Richtungs- und Drehungssinnes die verschiedenen Arten sphärischer Dreiecke, insofern deren Bestimmungsstücke zwischen 0 und 2π liegen, voneinander trennte. Study adoptierte diese Sinnbestimmung, erweiterte aber zugleich den Begriff des sphärischen Dreiecks noch nach zwei Richtungen. Zunächst faßte er ein Dreikant mit der Spitze im Kugelmittelpunkt ins Auge und zeigte, daß ein solches zu 64 verschiedenen „Nachbardreiecken" Anlaß gibt, welche durch lineare eine Gruppe G_{64} bildende Substitutionen ineinander übergehen. Faßt man aber auch diejenigen Dreiecke als verschieden auf, deren Seiten und Winkel sich um 2π unterscheiden, wie dies schon Gauß zu tun beabsichtigt hatte[2]), dann gehören natürlich zu einem Dreikant unendlich viele Dreiecke, die sich in der Weise um 64 Typen derselben gruppieren, daß die jedem Typus entsprechenden um beliebige Vielfache von 2π in den Seiten und Winkeln verschieden sind. Die Gesamtheit dieser Dreiecke geht dann durch eine Gruppe von unendlich vielen linearen Substitutionen in sich über[3]), die durch die Gleichungen:

$$a_i' = (-1)^{\varepsilon_i} a_1 + m_i\pi,\ \alpha_i' = (-1)^{e_i} \alpha_i + \mu_i\pi\ \ (e_i,\ \varepsilon_i = 0, 1;\ i = 1, 2, 3)$$

definiert sind, wobei die a_i die Seiten, die α_i die Außenwinkel eines Dreiecks bedeuten, während die Größen m_i, μ_i den Kongruenzen genügen müssen:

$$m_1 + e_2 + e_3 \equiv 0,\ m_2 + e_3 + e_1 \equiv 0,\ m_3 + e_1 + e_2 \equiv 0;\ \mu_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \equiv 0,$$
$$\mu_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_1 \equiv 0,\ \ \mu_3 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \equiv 0\ (\text{mod. } 2).$$

Diese Gruppe enthält namentlich eine sehr wichtige „ausgezeichnete" Untergruppe G, welche dadurch bestimmt ist, daß zwischen den obigen Zahlen noch die Kongruenz besteht:

$$\tfrac{1}{2}\Sigma m_i + \tfrac{1}{2}\Sigma \mu_i + e_2\varepsilon_3 + e_3\varepsilon_1 + e_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2 e_3 + \varepsilon_3 e_1 + \varepsilon_1 e_2 \equiv 0\ (\text{mod. } 2)^*).$$

Übt man ihre Substitutionen auf ein elementares Dreieck, dessen Seiten und Winkel zwischen 0 und π liegen, aus, so gelangt man zu

---

1) Sphärische Trigonometrie, orthogonale Substitutionen und elliptische Funktionen. Abhandl. der K. Sächsischen Gesellschaft der W. XX, Leipzig 1893, 87—232. — 2) Wieder aufmerksam machte hierauf F. Klein in seiner Vorlesung über Nichteuklidische Geometrie, 1889/90. Ausgearbeitet von Schilling 1892, 19—20. — 3) Indem zu den Operationen der G_{64} noch die unendliche Gruppe $a_i' = a_i + 2k\pi$, $\alpha_i' = \alpha_i + 2k\pi$ hinzukommt.

einer ersten Klasse von Dreiecken, Study nennt sie eigentliche Dreiecke, die durch kontinuierliche Deformation ineinander übergeführt werden können. Dies letztere gilt auch von der zweiten Klasse von Dreiecken, den uneigentlichen, welche aus einem Elementardreieck durch jene Operationen gewonnen werden, für welche der Ausdruck*) $\equiv 1$ (mod. 2) ist. Dagegen kann man kein Dreieck der einen Klasse in ein solches der andern durch stetige Abänderung der Bestimmungsstücke überführen. Demgemäß teilen sich dann auch sämtliche Formeln der sphärischen Trigonometrie in zwei Klassen, je nachdem sie für Dreiecke beider Arten oder nur für „eigentliche" Dreiecke gelten. Die ersteren sind jene, welche schon De Gua und Lagrange aus dem Cosinussatze allein abgeleitet hatten, die letzteren dagegen entspringen aus den Delambreschen Gleichungen, wodurch der Grund für die schon von Schmeißer, Bretschneider und andern geahnte Wichtigkeit der letzteren aufgedeckt ist. „Von diesen Grundformeln aus vollzieht sich der Übergang zu allen andern Formeln derselben Klasse durch eindeutige Operationen und ebenso auch der Übergang von den Formeln der zweiten Klasse zu denen der ersten. Dagegen erfordert der Übergang von der ersten zur zweiten Klasse die Bestimmung des Vorzeichens einer Quadratwurzel, also eine Wahl zwischen zwei Möglichkeiten." So gelten die Delambreschen Gleichungen für die zweite Dreiecksklasse nur dann, wenn in allen zugleich die Zeichen umgekehrt werden. Auch diesen Fall hatte schon Gauß vorausgesehen, indem er sagte[1]: „... casus existere possunt, ubi in cunctis aequationibus praecedentibus signum mutare oportet." Diese durch die Gruppentheorie geforderte Teilung in zwei Dreiecksklassen zeigt auch, daß, da die eigentlichen Dreiecke nicht in getrennte Scharen zerfallen, sondern eine kontinuierliche Mannigfaltigkeit bilden, ein zweiter Fortschritt, ähnlich dem Übergang von Sinus- und Cosinussatz zu den Delambreschen Gleichungen, nicht mehr möglich und „die Entwicklung der sphärischen Trigonometrie nach gewisser Richtung hin abgeschlossen ist".

Zur zweiten Formelklasse gehören auch die L'Huilierschen Formeln (S. 196 Anm. 6 zu S. 195), die hier zum erstenmal in einer völlig symmetrischen Gestalt gegeben werden. Diese wird erhalten, indem man die gewöhnlichen Bezeichnungen des sphärischen Dreiecks durch folgende ersetzt: $a = a_1$, $b = a_2$, $c = a_3$, $\alpha = \pi - \alpha_1$, $\beta = \pi - \alpha_2$, $\gamma = \pi - \alpha_3$, $s = \pi - s_0$, $s - a = s_1$, $s - b = s_2$, $s - c = s_3$, $\varepsilon = 2\sigma_0$, $\sigma - \alpha = \frac{\pi}{2} - \sigma_1$,

1) Theoria motus Nr. 54.

$\sigma - \beta = \frac{\pi}{2} - \sigma_2, \quad \sigma - \gamma = \frac{\pi}{2} - \sigma_3$ und $\prod_0^3 \operatorname{tg} \frac{\sigma_i}{2} = M^2 = \prod_0^3 \operatorname{tg} \frac{s_i}{2}$ schreibt. Dadurch erhält man die sämtlichen acht Formeln in der eleganten Gestalt: $\operatorname{tg} \frac{s_i}{2} \operatorname{tg} \frac{\sigma_i}{2} = M$[1] $(i = 0, 1, 2, 3)$.

Aber die Delambreschen Gleichungen liefern noch eine Gruppe von Formeln der zweiten Klasse, die in der ihnen von Study gegebenen Form neu sind und nach seiner Ansicht „den algebraisch einfachsten Ausdruck der Abhängigkeit zwischen Seiten und Winkeln eines sphärischen Dreiecks enthalten". Es sind dies drei durch zyklische Vertauschung der Indizes aus der Form

$$l_1 l_2 = \frac{+1 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 - \lambda_1\lambda_2}{-1 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 + \lambda_1\lambda_2}$$

hervorgehende Relationen, wobei $l_i = \operatorname{ctg} \frac{a_i}{2}$, $\lambda_i = \operatorname{ctg} \frac{\alpha_i}{2}$ bedeuten, sowie drei weitere, die aus diesen durch Vertauschung von l mit λ entstehen.

Wenn man nun die drei Zähler und den gemeinsamen Nenner der ersten drei Ausdrücke mit Y_0, Y_1, Y_2, Y_3 und die entsprechenden Größen der zweiten Gruppe von Formeln mit Z_0, Z_1, Z_2, Z_3 bezeichnet, so sind die Z_i lineare homogene Funktionen der Y_i und umgekehrt, und die Y_i wie die Z_i lassen sich durch vier neue Größen X_0, X_1, X_2, X_3 ebenfalls linear und homogen ausdrücken. Führt man dann die Y_i und Z_i oder die X_i statt der l_i und λ_i oben ein, so erhält man die Seiten und Winkel des sphärischen Dreiecks durch einfache Gleichungen in diesen Größen ausgedrückt. Insbesondere werden die Cosinus der Seiten und Winkel Quotienten gewisser ganzer rationaler Funktionen der X_i, die nichts anderes sind als die Eulerschen Ausdrücke für die Koeffizienten einer orthogonalen Substitution, d. i. für die Koeffizienten des Formelsystems $a_{0i} \mathfrak{Z}_i' = a_{i1} \mathfrak{Z}_1 + a_{i2} \mathfrak{Z}_2 + a_{i3} \mathfrak{Z}_3$ $(i = 1, 2, 3)$, $a_{00} = \Sigma X_i^2$, das den Übergang von einem rechtwinkligen Koordinatensystem $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2, \mathfrak{Z}_3$ zu einem andern $\mathfrak{Z}_1', \mathfrak{Z}_2', \mathfrak{Z}_3'$ mit demselben Anfangspunkte vermittelt. Man sieht, wie sich hier Studys Resultate mit Raabes, Sturms und Puissants Gedanken (S. 179 und 180) treffen, die Grundformeln der Trigonometrie aus der Koordinatentransformation zu gewinnen. In der Tat liefern auch, wenn $\cos a_1 = \frac{a_{23}}{a_{11}}$, $\cos a_2 = \frac{a_{31}}{a_{22}}$, $\cos a_3 = \frac{a_{12}}{a_{33}}$; $\cos \alpha_1 = \frac{a_{32}}{a_{11}}$, $\cos \alpha_2 = \frac{a_{13}}{a_{22}}$, $\cos \alpha_3 = \frac{a_{21}}{a_{33}}$ gesetzt werden, die bekannten

[1] Für Dreiecke, deren Bestimmungsstücke zwischen 0 und π liegen, hat M positiven Wert.

Identitäten zwischen den Koeffizienten a_{ik} der orthogonalen Substitution direkt die fraglichen Fundamentalgleichungen, und dabei bietet sich noch das Theorem dar, daß zu einer orthogonalen Substitution in drei Veränderlichen ein bestimmtes sphärisches Dreieck gehört.

Auf die interessante Abbildung der sämtlichen sphärischen Dreiecke auf den Punktraum, welche dadurch entsteht, daß man die X_i als homogene Punktkoordinaten auffaßt, sowie auf eine zweite mittelst ebener Kreisvierecke, die eine direkte Konstruktion der Winkel aus den Seiten oder umgekehrt liefert, können wir nur hinweisen. Zudem bemerken wir noch, daß Study durch eine Ausdehnung seiner Untersuchungen auf den Zusammenhang der elliptischen Funktionen mit der sphärischen Trigonometrie zu Formeln gelangte, welche die schon (S. 198—199) erwähnten von Lagrange als speziellen Fall enthalten und die Cotangenten der halben Seiten und Winkel (l_i, λ_i) eines sphärischen Dreiecks als eindeutige homogene Funktionen 0. Grades von sechs Verhältnisgrößen darstellen, zwischen denen zwei lineare Gleichungen bestehen. Auch die Cosinus und Sinus ergeben sich dann als eindeutige Funktionen derselben Größen, während dies bei einer zweiten Darstellung durch elliptische Funktionen zweier Argumente, die er außerdem noch mitteilte, nicht der Fall ist. Es ist übrigens hervorzuheben, daß auch zu diesen Resultaten die Voranstellung des Gruppenbegriffes führte, der eine neue Zusammenordnung der Weierstraßschen und Jacobischen Additionstheoreme von vier Variabeln gestattete, die den Ausgang von Studys Untersuchung bildeten.[1])

Über die hier kurz angedeuteten Resultate der Arbeit Studys hat F. Klein in jener schon erwähnten Vorlesung über die hypergeometrischen Funktion (1894) berichtet und dabei noch weitere Gesichtspunkte eröffnet. So teilte er die Trigonometrie in eine transzendente und in eine algebraische ein. Transzendent nannte er jene Trigonometrie, die sich mit den Winkelgrößen selbst beschäftigt, insofern die Winkel und Seiten der Dreiecke transzendente analytische Funktionen der gewöhnlichen Raumkoordinaten sind, in ihr sind alle Dreiecke mit verschiedenen Bestimmungsstücken auch wirklich verschieden. Algebraisch aber ist jene Trigonometrie, welche sich darauf beschränkt, nur die Relationen zwischen den Cosinus und Sinus der Bestimmungsstücke ins Auge zu fassen, und zwar heißt sie algebraisch von der 1. Stufe, wenn sie die Winkelgrößen nur mod. 2π betrachtet,

1) Es gibt im ganzen $4 \cdot 64 = 256$ Additionstheoreme, die durch eine Gruppe von ebensovielen involutorischen Substitutionen ineinander übergehen und von Study durch eine Abänderung der gewöhnlichen Bezeichnung in sehr übersichtlicher Gestalt dargestellt werden.

also den Dreiecksbegriff von Möbius zugrunde legt. Werden aber auch die Formeln zwischen den halben Winkeln in Betracht gezogen, wie z. B. die Delambreschen Gleichungen, so sind erst jene Dreiecke identisch, deren Stücke sich mod. 4π unterscheiden; diese Trigonometrie heißt von der 2. Stufe u. s. w. Die Einteilung in eigentliche und uneigentliche Dreiecke kommt bei der 1. Stufe gar nicht in Frage, dagegen tritt sie bei der 2. Stufe sofort in Geltung.

Aus Studys Arbeit und Kleins Ideen ist auch 1895 eine Dissertation der Engländerin Grace Chisholm[1]) hervorgegangen, der es unter andern gelang, die vollständigen Systeme für die Mannigfaltigkeit der eigentlichen, wie für die der uneigentlichen Dreiecke aufzustellen, d. h. diejenigen Ausdrücke, aus denen sich alle Gleichungen der betreffenden Mannigfaltigkeit linear zusammensetzen lassen. Damit war einer jener Gedanken aufgegriffen und im speziellen durchbehandelt, die Study am Schlusse seiner Abhandlung als die fernern Aufgaben der Trigonometrie bezeichnet hatte.

§ 4. Einzelne Beiträge zur sphärischen Trigonometrie.

Während wir im vorigen Paragraphen die verschiedenen Versuche sich entwickeln sahen, die zum systematischen Ausbau der sphärischen Trigonometrie führten, wollen wir hier jene Beiträge vereinigen, die nur in einzelnen Formeln oder Theoremen bestanden. Gehen wir wieder zum Anfang des Jahrhunderts zurück, so haben wir zuerst Buzengeiger[2]) zu nennen, der 1816 zwanzig Relationen mitteilte, welche entstehen, „wenn ein rechtwinkliges sphärisches Dreieck ABC durch einen von der Spitze C des rechten Winkels ausgehenden senkrechten Bogen CD geteilt wird; z. B. ist $\sin^2 CD = \operatorname{tg} AD \cdot \operatorname{tg} BD$; $\operatorname{tg}^2 a = \operatorname{tg} c \cdot \operatorname{tg} BD$; $\operatorname{tg}^2 c = \operatorname{tg}^2 b + \operatorname{tg}^2 a + \operatorname{tg}^2 a \operatorname{tg}^2 b$[3]) u. s. w. Auch wurde wiederholt[4]) versucht, ein dem Pythagoräischen Lehrsatze ähnliches Theorem in der sphärischen Trigonometrie aufzustellen; Grunert[5]) fand dabei die Formel $\cos \triangle_c = \frac{\cos \triangle_b \cos \triangle_a}{1 + \sin \triangle_b \sin \triangle_a}$, wo die $\triangle$ die Hälften der über den Seiten errichteten sphärischen

1) Algebraisch-gruppentheoretische Untersuchungen zur sphärischen Trigonometrie, Göttingen 1895. Vgl. auch Atti di Torino XXXIV, 1899, 587—596 und Study in den Ber. der sächs. Gesellsch. math. phys. Klasse 1895, 582. — 2) Zeitschrift für Astronomie von Lindenau III, 1817, 198—202. — 3) Den ähnlichen Satz $\sin^2 \frac{c}{2} = \sin^2 \frac{b}{2} \cos^2 \frac{a}{2} + \sin^2 \frac{a}{2} \cos^2 \frac{b}{2}$ hatte schon L'Huilier mit einigen andern Sätzen 1810/11 in den Annales de Math. I, 198 gegeben. — 4) Vgl. z. B. den mißlungenen Versuch Gudermanns im Journal für Math. XLII, 280. — 5) Archiv für Mathem. XI, 1848, 225.

Quadrate sind. Neue Relationen für das schiefwinklige Dreieck gaben auch noch Delambre[1]), Puissant[2]), Mollweide (siehe weiter unten), Möbius[3]) und in neuester Zeit A. Cayley[4]) (1821—1895), Catalan, Gerondal[5]) und Dziobek[6]), doch bieten diese Formeln mehr theoretisches Interesse.

Wichtiger als diese speziellen Resultate waren die Bemühungen verschiedener Gelehrter, namentlich der Astronomen, um die gefundenen Formeln brauchbar für die Rechnung zu gestalten. So brachte Gauß[7]) den Cosinussatz in die Form $\cos a = \frac{\cos b}{\sin \varphi} \sin (\varphi + c)$, indem er den Hilfswinkel φ aus der Gleichung $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{ctg} b}{\cos A}$ bestimmte, und Delambre[8]) gab hierfür eine ganze Reihe von Umformungen an, aus denen wir die eine $\cos a = \frac{\cos (b + c)}{\cos x}$ für $\operatorname{tg}^2 x = \frac{2 \cos^2 \frac{A}{2} \sin b \sin c}{\cos (c + b)}$ als neu hervorheben, die sich neben die schon bekannten Umformungen von Lambert und Cagnoli stellte. Auch die Umgestaltung $\cos a = \frac{\cos b}{\cos x} \cos (c - x)$, wenn $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} b \cos A$ ist, erwähnt Delambre, indem er zeigt, daß x nichts anderes als der Abschnitt AD ist, den die Höhe CD auf der Grundlinie AB des Dreiecks macht, weshalb die Berechnung von a nach diesen Formeln auf die aus der Zerspaltung des Dreiecks in zwei rechtwinklige gewonnene und von den Astronomen längst geübte Methode hinausläuft.[9])

Obgleich Delambre die Aufgabe, ein Dreieck aus zwei Seiten b, c und dem Zwischenwinkel A zu berechnen, auf zehn verschiedene Arten gelöst hatte, so gelang es doch Mollweide, noch neun Formeln

1) Z. B. Astronomie Chap. X Nr. 190. — 2) Géodésie I, 87. — 3) Journal für Mathem. XXIV, 85—92. Hier setzt er eine von Euler gegebene algebraische Identität in eine solche zwischen Doppelverhältnissen um und führt dann auf Grund der Invarianz des Doppelverhältnisses bei Projektion die Sinus der Winkel am Projektionspunkt ein. Dadurch erhält er eine Reihe von Identitäten zwischen den Sinus der Winkel, die im speziellen zu einigen Sätzen auf der Kugel Anlaß geben. — 4) Messenger of Mathem. I, 1872, 137. Ferner gab er 1880 (Collected Papers XI, 97) die beiden Formeln: $-\operatorname{tg} \frac{c}{2} \operatorname{tg} \frac{a}{2} \operatorname{tg} \frac{b}{2} \sin (A - B) = \operatorname{tg} \frac{b}{2} \sin A - \operatorname{tg} \frac{a}{2} \sin B$ und $\operatorname{tg} \frac{c}{2} \left(1 - \operatorname{tg} \frac{a}{2} \operatorname{tg} \frac{b}{2} \cos (A - B)\right) = \operatorname{tg} \frac{b}{2} \cos A + \operatorname{tg} \frac{a}{2} \cos B$. — 5) Mathesis VIII, 1888, 133 und 134. — 6) Dieser verallgemeinerte das Pentagramma mirificum von Gauß (Werke III, 481—490, VIII, 106—117) und leitete aus der hierbei gewonnenen Konfiguration ein neues Formelsystem ab. Archiv für Mathem. 2. Serie XVI, 1898, 320—326. — 7) Theoria motus. Nr. 67. — 8) A. a. O. 175—182. — 9) A. a. O. 176.

hierfür anzugeben.[1]) So setzte er z. B. $\cos\frac{A}{2}\sqrt{\sin b \sin c} = \sin u$ und fand $\sin\frac{a}{2} = \sqrt{\sin\left(\frac{b+c}{2}+u\right)\sin\left(\frac{b+c}{2}-u\right)}$, oder er bestimmte y aus $\operatorname{tg} y = \frac{\sin b \sin c \sin A \operatorname{ctg}\frac{A}{2}}{\sin(b+c)}$ und erhielt $\operatorname{tg}\frac{a}{2} = \sqrt{\operatorname{tg}\frac{b+c}{2}\operatorname{tg}\left(\frac{b+c}{2}-y\right)}$, welch letztere Formeln dann von Vorteil sind, wenn man das Resultat mit großer Schärfe bestimmen will. Die noch fehlenden Winkel ergeben sich aus $\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \frac{\sin(s-a)}{\sin(s-b)}\operatorname{tg}\frac{A}{2}$ und $\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{\sin(s-a)}{\sin(s-c)}\operatorname{tg}\frac{A}{2}$.

Wir wissen, daß der Vorteil, welcher in der Benützung der Tangenten zur genauen Bestimmung von Winkelgrößen liegt, schon längst erkannt war, aber zum Ausgangspunkt einer umfassenden Arbeit, in welcher die ganze sphärische Trigonometrie mit neuen Formeln behandelt wurde, machte diesen Gesichtspunkt doch erst im Jahre 1887 der Italiener Domenico Ragona.[2]) Er ging von der Berechnung der rechtwinkligen sphärischen Dreiecke aus und teilte die sechs möglichen Fälle in zwei Gruppen, für die er eigene Formeln angab. Z. B. lösen die Formeln $\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\left(45^0 - \frac{\alpha}{2}\right)\sqrt{\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}}$, $\operatorname{tg}\varphi' = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}^2\left(45^0 - \frac{\alpha}{2}\right)}$, $X = \pm(\varphi' + \varphi)$, $Y = \pm(\varphi' - \varphi)$, $\operatorname{tg}\left(45^0 - \frac{Z}{2}\right) = \pm \operatorname{tg}\varphi' \operatorname{tg}\left(45^0 - \frac{\alpha}{2}\right)$ die drei Fälle: 1) gegeben die Hypotenuse $\alpha = a$ und eine der beiden Katheten $\beta = \begin{cases} b \\ c \end{cases}$, wobei $X = C$, bezüglich B, $Y = \begin{cases} c \\ b \end{cases}$, $Z = B$ beziehungsweise C ist; 2) gegeben einer der beiden Winkel, etwa $\alpha = B$ und die gegenüberliegende Kathete $\beta = b$, dann ist $X = 90^0 - c$, $Y = 90^0 - C$, $Z = a$ zu setzen; 3) gegeben die beiden Winkel $\alpha = B$, $\beta = 90^0 - C$, wofern $X = a$, $Y = b$, $Z = 90^0 - c$ ist. Eine ähnliche Formelgruppe löst die drei noch fehlenden Aufgaben. Noch eigenartiger sind die Gleichungen zur Lösung der Aufgaben über schiefwinklige Dreiecke. Die Methode, die er bei ihrer Aufstellung befolgt, besteht darin, daß er die Winkel X und Y, welche

---

1) Auszug aus einem Schreiben an den Direktor der Sternwarte zu Seeberg vom 10. März 1816. Zeitschrift für Astr. von Lindenau I, 459—460. Delambre hat seine Formeln in Connaissance de temps für 1820, 346 abgeleitet und Puissant teilte sie in seiner Géodésie I, 106 mit. Eine ebenfalls neue, wenn auch nicht sehr praktische Lösung gab E. Sang in Edinburgh new philosoph. Journal XXVIII, 1832/33, 311. — 2) Nuove formule relative alla risolutione dei triangoli sferici. Memorie della r. Accademia di scienze in Modena. Serie 2, V, 1887, 53—119. — Vgl. auch Nell im Archiv für Mathematik XLIX, 104—110.

eine Höhe und die von derselben Ecke ausgehende Seitenhalbierende mit einer anliegenden Seite einschließen, sowie die Abschnitte x, y, welche diese Höhe und die Winkelhalbierende auf der Gegenseite bilden, als Hilfsgrößen einführt. Allerdings werden hierdurch lauter logarithmierbare Formeln erhalten, die fast nur Tangenten umschließen, doch gestaltet sich die Behandlung der einzelnen Fälle so umständlich, daß die Methode bisher keine weitere Verwendung gefunden hat.

Kehren wir wieder zum Anfang des Jahrhunderts zurück! Die umfassendste Behandlung aller sphärischen Dreiecksfälle hatte unzweifelhaft Delambre gegeben[1]) und namentlich besprach er auch die mehrdeutigen unter ihnen auf Grundlage der Formeln. Was die Diskussion der letzteren anlangt, so beschäftigte sich übrigens schon zwei Jahre früher (1812) L'Huilier[2]) mit dem doppeldeutigen Fall der ebenen Trigonometrie, indem er ihn geometrisch zu erläutern suchte, und Grunert[3]) kam dann 1842 wieder darauf zurück, wobei er drei verschiedene Methoden angab, die aus der Benützung des Sinussatzes, des Projektionssatzes und endlich des Cosinussatzes hervorgingen. Für das sphärische Dreieck aber gab Matzka[4]) in einem Aufsatze über die Bestimmbarkeit des sphärischen Dreiecks aus drei Stücken 1848 zwei Methoden an, von denen die an die Gleichung $\operatorname{tg}^2 \frac{c}{2} - 2 \frac{\sin b \cos \alpha}{\cos a + \cos b} \operatorname{tg} \frac{c}{2} + \frac{\cos a - \cos b}{\cos a + \cos b} = 0$ sich anschließende an Vollständigkeit nichts zu wünschen übrig läßt, während die andern mit Heinsius' Methode viel Ähnlichkeit hatte.

Die Trigonometrie der Kleinkreise hatte, wie wir uns erinnern, zum erstenmal D'Alembert (S. 129) einer Betrachtung unterzogen, und Bossut hatte eine Methode zur elementaren Bestimmung der Fläche eines aus drei Kleinkreisen gebildeten Dreiecks hinzugefügt, ohne jedoch eine Formel hierfür zu liefern. Die Aufstellung einer solchen unternahm der Belgier A. Quetelet (1796—1874)[5]) 1820. Indem er die Fläche des Kugeloktanten und den Bogen eines rechten Winkels gleich 1 setzte, mit P, P' und P'' die Winkel, welche die von den Polen der Kleinkreise nach den Ecken A, A', A'' des Dreiecks gehenden Hauptkreisbögen miteinander bilden, bezeichnete

1) Eine Eigentümlichkeit, die er in seinem ganzen Werke beibehält, ist, daß er von Eulers praktischer Bezeichnung des Dreiecks abweichend die Seiten mit C, C', C'', die Winkel mit A, A', A'' bezeichnet. — 2) Annales de Mathém. II, 257. — 3) Archiv für Mathem. II, 333. — 4) Ebenda XI, 300—310. Vgl. auch Lentheric, Nouv. Ann. 1843, II, 32, Jenkins Messenger of Mathem. II, 1873, 150—152 und Lloyd Tanner, ebenda 1885, XIV, 153—154, der die Neperschen Gleichungen benützt. — 5) Nouveaux mémoires de l'Académie r. des sciences de Bruxelles. II, 1822, 105—119 (vorgelegt 1820).

(also $APA' = P$ u. s. w.) und die Winkel $PAP' = \alpha$, $P'A''P'' = \alpha''$, $P''A'P = \alpha'$ nannte, erhielt er auf sehr einfachem Wege die Formel: Fläche $= 4 - \alpha - \alpha' - \alpha'' + P \cdot d + P'd' + P''d''$, wobei d, d', d'' die senkrechten Abstände der Kleinkreisebenen vom Kugelmittelpunkt ausdrücken. Auch bot diese Formel den Vorteil, daß man sie sofort auf Polygone ausdehnen konnte. Dieselbe Aufgabe nahmen dann 1850 Townsend[1]) und 1853 H. Faure[2]) wieder auf, und letzterer gab die elegante Formel $F = A + B + C - 180^0 - (\alpha \cos \varrho + \beta \cos \varrho' + \gamma \cos \varrho'')$, worin A, B, C die Winkel des Dreiecks, α, β, γ die oben mit P, P', P'' bezeichneten Winkel und $\varrho, \varrho', \varrho''$ die sphärischen Radien der Kleinkreise sind. Eingehender behandelt wurde das Kleinkreisdreieck erst von E. C. Hudson 1895 und 1898.[3]) Sein Prinzip besteht darin, die senkrechten Abstände der Seiten des Dreiecks ABC von den parallelen Seiten eines Großkreisdreiecks DEF einzuführen; sind diese Abstände, Breiten genannt, von den Ecken A, B, C aus gefällt, $AA_1 = BB_2 = \gamma$, $AA_2 = CC_1 = \beta$, $BB_1 = CC_2 = \alpha$ und die Entfernungen ihrer Fußpunkte von den Ecken D, E, F, $DA_1 = a_1$, $DA_2 = a_2$; $EB_1 = b_1$, $EB_2 = b_2$, $FC_1 = c_1$, $FC_2 = c_2$, ferner $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$, so ergeben sich drei Hauptformelgruppen: $\sin a_1 = \frac{\sin \beta + \sin \gamma \cos A}{\cos \gamma \sin A}$, ähnlich für $\sin a_2$ u. s. w., $\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos (a + b_1 + c_2)$ u. s. w. und $\operatorname{tg} \frac{a}{2} = \frac{2N - \sin B \sin C \sin (b_1 + c_2)}{\cos A + \cos B \cos C + \sin B \sin C \cos (b_1 + c_2)}$.[4]) Diese geben für spezielle Dreiecke, z. B. für rechtwinklige mit nur einer Kleinkreisseite, sehr brauchbare Gleichungen. Eine weitere aber sehr komplizierte Formelgruppe gewinnt Hudson noch durch Anwendung der Koordinaten. Mit diesen Formeln findet er elegante Ausdrücke für die Radien der einem Kleinkreisdreieck ein- und umgeschriebenen Kreise, auch gibt er einige Anwendungen seiner Formeln auf astronomische Aufgaben an.

Hervorragende praktische Bedeutung kann jedoch diese Kleinkreistrigonometrie nicht beanspruchen. Dagegen kommt eine solche in eminenter Weise jenen Untersuchungen zu, die sich mit sphärischen Dreiecken, aus sehr kleinen Seiten gebildet, beschäftigen. Den bedeutendsten Satz, der hier in Frage kommt, den Satz von Legendre, hatte bereits das vergangene Jahrhundert gebracht, und die Methoden von Legendre und Delambre, die die Berechnung solcher Dreiecke

1) Nouv. Ann. IX, 1850, 364. — 2) Ebenda XII, 1853, 221—224. — 3) Quarterly Journal of Mathematics XXVII, 378—386 und XXIX, 202—205. — 4) N ist hier $= \sqrt{\{\sin E \sin (A - E) \sin (B - E) \sin (C - E)\}}$, $2E = A + B + C - \pi$.

ausbildeten, waren in den Besitz der Geodäten übergegangen, so daß die Verfolgung ihres weiteren Ausbaues einer Geschichte der Geodäsie angehört. Wir wollen daher aus der Menge der Beweise, die in der Folgezeit für den Legendreschen Satz gegeben wurden, die hauptsächlichsten nur in einer Anmerkung[1]) nennen und noch einige auf diese Dinge bezügliche Notizen anführen. Schon 1818 versuchte Buzengeiger Legendres Satz durch einen genauern zu ersetzen, indem er erst Größen von der 6. Ordnung vernachlässigte, und erhielt für einen Winkel α' des ebenen Dreiecks $\alpha' = \alpha - \frac{\varepsilon}{3} - \frac{\varepsilon}{180}(b^2 + c^2 - 2a^2)$ $= \alpha - \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon^2}{90}(\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma - 2\operatorname{ctg}\alpha)$.[2]) 1847 fügte Grunert und 1874 Nell zu diesem Ausdruck noch ein weiteres Korrektionsglied hinzu.[3])

Außer der Methode zur Berechnung von Dreiecksnetzen nach dem Legendreschen Satze bediente sich aber Delambre bei Berechnung des Meridianbogens zwischen Dünkirchen und Barzelona[4]) noch einer anderen, die an Stelle der Berechnung sphärischer Dreiecke die ihrer Sehnendreiecke setzte. Wie wir sahen, hatte Cagnoli schon Formeln angegeben, welche diese Dreiecke zueinander in Beziehung setzen; indem nun Grunert 1855[5]) wieder auf diese Relationen zurückkam, gelang ihm die Aufstellung eines interessanten Satzes, der

1) Die Beweise von Legendre und Lagrange haben wir bereits S. 159, Anm. 5 angeführt. Bezüglich Legendre vgl. auch: Géométrie, Appendix zur Trigonometrie Nr. CV. Delambre gab eine Verifikation, nicht aber eine Ableitung des Satzes in Méthodes analytiques pour la détermination d'un arc du méridien, 1798/99. 1818 veröffentlichte dann Buzengeiger den ersten Beweis, der erkennen läßt, unter welcher Voraussetzung der Satz richtig ist, Zeitschrift für Astronomie von Lindenau VI, 264—270. 1841 gab Gauß einen sehr exakten, wenn auch komplizierten Beweis im Journal für Mathem. XXII, 96. Darüber Grunert im Archiv für Mathem. I, 436, 1841. Dieser gab zwei neue Beweise, ebenda 1854, XXIII, 111 ff. Ferner Winkler, Journal für Mathem. XLIV, 1852, 273—274 und ähnlich Tissot, Nouv. Ann. 1862, 2. Serie I, 5 ff. Mertens, Zeitschrift für Mathem. und Phys. XX, 1875, 248, ebenso Nell, ebenda 1874, XIX, 324 ff. — Auf beliebige Flächen ausgedehnt hat Gauß Legendres Verfahren in seinen Disquisitiones generales circa superficies curvas 1827. — 2) Diese Ergänzung gibt auch Bessel an. Vgl. Wolf H. A., I, 233 und Gauß hat die obige Formel in seinen Disquisitiones generales 1827, § 27 (Werke, IV, 257) als Spezialfall aus der Formel für ein Dreieck auf beliebiger Fläche erhalten. — 3) Archiv für Mathem. IX, 8—45 und Astronomische Nachrichten LII Nr. 1228, 49, sowie Zeitschrift für Mathem. XIX, 324 ff. — 4) Base du système métrique décimale etc. 3 Voll. in 4°, Paris 1806, 7, 10. — 5) Archiv für Mathem. XXV, 197—210; einen zweiten Beweis gab Unferdinger ebenda 1859, XXXIII, 89—91. Auch Mossotti hat 1850 einen Ersatz des Legendreschen Satzes im Falle des Sphäroids gegeben, Annali di Matem. I, 396, vgl. auch Airy in Philosophical Magazine 1850, XXXVI, 96 und Simonelli in Annali di Matem. 1854, V, 186.

sich ebenbürtig neben jenen Legendres stellt, und den Nagel 1856 noch präziser formulierte.[1])

Zu den für höhere Geodäsie und Astronomie wichtigen Methoden gehören auch die Berechnung der Dreiecksstücke und die Lösung gewisser trigonometrischer Gleichungen durch Reihen, wie sie Lagrange (S. 138 ff.), Lambert und Delambre gaben; den Formeln, die der letztere in seinen analytischen Methoden zur Bestimmung eines Meridianbogens benützt hatte, fügte Mollweide 1807 noch einige hinzu[2]), auch vervollständigte er in einer anderen Abhandlung desselben Jahres, wie gleich hier bemerkt werden mag, die von Snellius zuerst angewandte und von Lambert verbesserte Berechnung ebener Dreiecke ohne Tafeln, indem er durch Einführung der Reihen für die Funktionen die Gültigkeitsgrenzen dieser Formeln untersuchte[3]), und im Anschluß hieran machte Olbers die neue Gleichung bekannt[4]): $\varphi = \frac{3 \operatorname{tg} \varphi}{3 + \operatorname{tg} \varphi}$, die die Hypotenuse des zu bestimmenden Dreiecks nicht enthält. Mit jenen Reihen zur Berechnung der Elemente sphärischer Dreiecke aber beschäftigte sich auch 1817 Legendre im Exercise du calcul intégral (II, 238)[5]) und wieder 1852 Grunert[6]) in seiner bekannten breiten Weise, und Encke (1791–1865) gab eine Zusammenstellung der hauptsächlichsten dieser Reihen in den Astronomischen Nachrichten Nr. 562. Daran knüpfte 1874 hinwiederum Ligowski an[7]), indem er etwas andere Ableitungen brachte, während Meißel[8]) 1879 und 1880 von der Transformation zweiter Ordnung der elliptischen Funktionen ausgehend neue Resultate gewann. Dabei erhielt er den interessanten Satz: „Zu einem sphärischen Dreieck mit den Elementen $a, b, c; \alpha, \beta, \gamma$ existiert stets ein zweites mit den

1) Zeitschrift für Math. und Phys. I, 257—275. Dabei teilt Nagel Formeln mit, die J. Riedl von Leuenstern (Beiträge zur Theorie der Sehnenwinkel, Wien 1827) und Faber (der Erfinder der Sprechmaschine) fanden, und leitet aus ihnen den Satz von Grunert ab. Die Hauptformeln Grunerts sind $c_1 = a_1 \frac{\sin\left(C - \frac{\varepsilon}{4}\right)}{\sin\left(A - \frac{\varepsilon}{4}\right)} = b_1 \frac{\sin\left(C - \frac{\varepsilon}{4}\right)}{\sin\left(B - \frac{\varepsilon}{4}\right)}$ u. s. w., wo a_1, b_1, c_1 die Seiten des Sehnendreiecks bedeuten. — 2) Monatl. Korresp. von Zach XV, 441—451. — 3) Ebenda XVI, 18—35. So ist z. B. die eine der beiden Formeln des Snellius (Tl. I, S. 244) durch die genauere $\varphi = \frac{1}{30}(4 \operatorname{tg} \varphi + 32 \sin \varphi - 3 \sin 2\varphi) - \frac{1}{105}\varphi^7$ zu ersetzen. — 4) Ebenda 539. — 5) Vgl. auch seine Trigonometrie Nr. C—CIV. — 6) Archiv für Mathem. XVIII, 420—452. — 7) Archiv für Mathem. LVI, 328—332. A. Saporetti gab 1887 in den Memorie dell' Accad. r. di Bologna, 4. S. VIII, 59—62 eine elementare Lösung der Gleichung $\operatorname{tg} y = m \operatorname{tg} x$. — 8) Archiv für Mathem. LXIV, 447 und LXV, 429, sowie in Astronomische Nachrichten XCV, Nr. 2261, 69—74 und in Mathem. Ann. XV, 380 und XVI, 529—532.

Stücken $a_1, b_1, c_1; \alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, so daß $\alpha_1 = \frac{\pi + a - \alpha}{2}$, u. s. w. $\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha_1}{2} = \frac{\operatorname{tg}\frac{a}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$ u. s. w. ist." Mit Hilfe dieses Satzes lassen sich die Differenzen zwischen Seiten und Winkeln in Rechnung ziehen.

Die Maskelynsche Regel zur Berechpnng der Funktionen kleiner Winkel, die wir S. 157 kennen lernten, war von ihrem Erfinder ohne Beweis mitgeteilt worden; einen solchen hat wohl zuerst Tralles 1804 gegeben (siehe ebenda Anm. 3). 1858 ersetzte sie Wolfers[1]) durch die genaueren Formeln: $\sin x = x\left(\cos^{\frac{1}{3}} x + \frac{1}{45} x^4 \cos x\right)$ und $\operatorname{tg} x = x\left(\sec^{\frac{2}{3}} x + \frac{1}{45} x^4\right)$, die bei Vernachlässigung von x^4 in die früheren übergehen, wogegen Hill[2]) schon 1841 $\sin \frac{180^0}{\pi} x = x - \frac{x^3}{6}\left(1 - \frac{x^2}{420}\right)^{21}$ anführte, ein Wert, der z. B. für $x = 0{,}1$ ein in 15 Ziffern richtiges Resultat gibt, während man mit der Formel $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2}\left(1 - \frac{x^2}{60}\right)^5$ schon 13 richtige Dezimalen erhält und $\operatorname{tg} x = x : \left(1 - \frac{7x^2}{15}\right)^{\frac{5}{7}}$ noch für $x = 11^0\, 18'\, 36'' = 0{,}2$ 7 richtige Ziffern liefert.[3])

Zur Berechnung der Bögen kleiner Winkel aus gegebenem Sinus ersann Bohnenberger[4]) (1765—1831) im Jahre 1826 seine Additamentenmethode, welche die Benützung der Zahlen S von Callet ersetzte (S. 158) und einfach auf der Berechnung von x aus der Arcussinusreihe beruhte. Die von ihm konstruierte Tafel gibt an, was zu $\log \sin x$ addiert werden muß (das Additament), um den Logarithmus des Bogens hinlänglich genau zu liefern. Dieselbe Aufgabe löste 1841 Grunert[5]) auf anderem Wege, indem er, um φ aus $\cos \varphi = A$ oder $\sin \varphi = A$ zu bestimmen, ϑ aus $A = \operatorname{tg} \vartheta$ berechnete, was jederzeit mit der nötigen Genauigkeit möglich ist, dann aus $\cos \varphi = \operatorname{tg} A$, $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \pm \sqrt{\operatorname{tg}(45^0 - \vartheta)}$ und aus $\sin \varphi = \operatorname{tg} \vartheta$,

---

1) Archiv für Mathem. XXX, 359. Ähnlich auch schon Matzka, ebenda XIII, 1849, 138. — 2) Ebenda I, 191—193. Vgl. auch Vincent, Nouv. Ann. I, 1842, 272 und Lionnet, ebenda II, 1843, 216; endlich Todhunter: Plane Trigonometry, 1859, 87—88 und Rawson, Messenger of Math. III, 1866, 101. — 3) In Gauß' Nachlaß, Werke VIII, 128 findet sich ein anderes Verfahren skizziert. — 4) De computandis dimensionibus trigonometricis in superficie terrae sferica institutis commentatur Joan. Theoph Fried. Bohnenberger (Tübinger Universitätsprogramm), deutsch von A. Hammer, Stuttgart 1885. Vgl. auch Nell in Zeitschrift für Mathem. und Phys. 1874, XIX, 324 ff. — 5) Archiv für Mathem. I, 73.

$\operatorname{tg}\left(45^0 - \frac{\varphi}{2}\right) = \pm \sqrt{\operatorname{tg}(45^0 - \vartheta)}$ ableitete und mit diesen Formeln sich φ verschaffte.

Die Differentialformeln für ebene und sphärische Dreiecke waren, wie wir sahen (S. 156), von Cagnoli bereits in großer Vollständigkeit zusammengestellt worden. Beiträge hierzu gaben noch Mollweide 1807[1]) und Wolfers 1847[2]), der die Hauptformeln der sphärischen Trigonometrie einerseits nach allen darin vorkommenden Größen differentiierte und dadurch Gleichungen erhielt, die im speziellen die bekannten Fehlergleichungen enthielten, andererseits durch Vornahme einer zweiten Differentiation neue Formeln ableitete. Endlich hat A. Hammer namentlich die Formeln für das ebene Dreieck in sehr eleganter Gestalt dargestellt[3]), indem er sie nach vier Fällen: Gegeben 1) $\triangle a, \triangle \beta, \triangle \gamma$, 2) $\triangle b, \triangle c, \triangle \alpha$, 3) $\triangle a, \triangle b, \triangle \alpha$, 4) $\triangle a, \triangle b, \triangle c$ anordnete. Die dem letzten Fall entsprechenden Formeln werden in der von ihm zuerst mitgeteilten Form

$$\frac{(\triangle \alpha)''}{\varrho''} = \left(\frac{\triangle a}{a} - \frac{\triangle b}{b}\right) \operatorname{ctg} \gamma - \left(\frac{\triangle a}{a} - \frac{\triangle c}{c}\right) \operatorname{ctg} \beta,$$

wo $\varrho'' = \frac{648000''}{\pi}$ ist, angegeben. Differentialformeln für die Polygonometrie teilte Christian Ludwig Gerling (1788—1864) in seiner „Ausgleichungsrechnung in der praktischen Geometrie“, Hamburg 1843 (p. 334—340) mit.

§ 5. Die Goniometrie als ein Teil der Funktionenlehre.

Wir haben schon im ersten Paragraphen dieses Kapitels erwähnt, daß man erst in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts ganz allmählich von der Definition der goniometrisohen Funktionen als Linien zu jener durch Verhältnisse überging, so daß z. B. noch A. Ripsal 1846 in den Nouvelles Annales (V, 84) und De Morgan in der English Cyclopaedia 1861 (VIII, 370) auf die Notwendigkeit der allgemeinen Einführung der letzteren Definition hinweisen konnten. Ja selbst Lagrange und Cauchy, die Schöpfer der Funktionentheorie, gingen sogar bei ihren analytischen Untersuchungen noch von der alten aus der Geometrie entnommenen Definition aus, wenn auch ersterer gelegentlich zeigte, wie man aus der Gleichung $e^{xi} = \cos x + i \sin x$ die Additionsformeln und damit die sämtlichen goniometrischen Gleichungen direkt ableiten könne.[4]) Damit soll jedoch nicht gesagt

1) Monatliche Korrespondenz von Zach XV, 441. — 2) Archiv für Mathem. X, 431. Vgl. auch J. W. Warren in Quarterly Journal of Mathem. XX, 170. — 3) Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie, Stuttgart 1897, 404—405. — 4) Leçons sur le calcul des fonctions, Leçon X, 2. Aufl. von 1806 in Oeuvres

sein, daß sich nicht, wenn auch nur vereinzelt, das Bestreben geltend machte, eine selbständige Theorie der goniometrischen Funktionen unabhängig von ihrer geometrischen Entstehung und ihrer Bedeutung für die Trigonometrie zu schaffen. Da aber eingehende Untersuchungen hierüber einer Geschichte der Funktionentheorie angehören, so lassen wir nur einige kurze Bemerkungen folgen.

Der erste, welcher einen Versuch einer rein analytischen Begründung der Lehre von den Winkelfunktionen wagte (1812/13), war Johann Georg Tralles (1763—1822)[1], aber seinen äußerst schwerfälligen Untersuchungen wurde wenig Beachtung geschenkt. 1830 gab dann Gudermann[2]) und 1831 August Leopold Crelle[3]) (1780—1855) nach einer Neubegründung der Definitionen von $\sin x$ und $\cos x$ durch die Exponentialfunktion eine Theorie jener Funktionen, während Karl Heinrich Schellbach (1805—1892) eine sehr schätzenswerte Abhandlung über die einfachsten periodischen Funktionen schrieb[4]), in welcher er von einer unendlichen Produktform ausging. 1858 legte J. Heinrich Durège[5]) (1821—1893) die Definitionsgleichung $u = \int\limits_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $x = \sin u$ zugrunde und verschaffte sich durch die Integration der Differentialgleichung $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0$ das Additionstheorem für den Sinus und damit die Quelle aller Eigenschaften dieser Funktion. Dieser letztere Weg war übrigens längst von Euler[6]) und Ferdinand Eisenstein (1823—1852)[7]), vorbereitet, und die Methode steht, wie auch die Schellbachs, in so enger Beziehung zur Theorie der elliptischen Funktionen, daß ihre zeitliche Entstehung nur von dieser aus verstanden werden kann. Auf einer

---

de Lagrange, Ed. Serret, X, 110—111. Vorgetragen wurden diese Lektionen schon 1799, veröffentlicht zum erstenmal 1801 in Séance des Écoles Normales (an IX).

1) Abhandl. der Berliner Akademie 1812/13, 161—239, gelesen 1810. — 2) Journal für Mathem. VI, 5 ff. — 3) Ebenda VII, 231 ff. Vgl. auch A. Cayley im Artikel „Function" der Encyclopädia Britannica, 9. Aufl., XI, 524. — 4) Journal für Mathem. XLVIII, 1854, 207—236. Eine ähnliche Ableitung aus der Formel $S(x) = x\Pi'\left[\left(1-\frac{x}{n}\right)e^{\frac{x}{n}}\right]$, wo n von $-\infty$ bis $+\infty$ mit Ausschluß der Null läuft, hat 1897 A. Pagès gegeben: Nouvelles Ann. 1897, 3. S., XVI, 341—365. — 5) Zeitschrift für Mathem. und Phys. III, 241. Siehe hierüber auch Encyclopädia Britannica Artikel „Trigonometry", 572—573. — 6) Institutiones calculi integralis, Petrop. 1768—1770, I, Sectio II, Cap. V, besonders Probl. 74, Coroll. 1, 431 und Probl. 75, Coroll. 4, 439. — 7) Journal für Mathem. XXX, 211—214.

ähnlichen Basis wie Tralles hat Eduard Lucas[1]) (1842—1891) 1878 eine vollständige Theorie der einfach periodischen Funktionen entwickelt, indem er auch, wie seiner Zeit Gudermann, die Hyperbelfunktionen mit einbegriff, R. Götting[2]) gab 1881 eine elementare Ableitung der trigonometrischen Funktionen, indem er von den Definitionsgleichungen $a_{k-1} + a_{k+1} = a_1 a_k$, $a_{k-1} - a_{k+1} = b_1 b_k$ ausging, wobei $a_0 = 2a_1$ eine beliebige reelle oder imaginäre Zahl ist und $b_1 = \pm\sqrt{a_0 - a_2}$ darstellt. Mit Hilfe des $2n$-Eckes gelingt schließlich, nach Entwicklung der Haupteigenschaften obiger Zahlen, der Nachweis, daß $\frac{a_\lambda}{2} = \cos\left(\lambda \frac{\pi}{2n}\right)$, $\frac{b_\lambda}{2} = \sin\left(\lambda \frac{\pi}{2n}\right)$ ist. Eine einheitliche Ableitung der Kreis- und Hyperbelfunktionen gab auch J. v. Villarceau[3]) in einer Note über die Periode der Funktion e. Desgleichen suchte 1895 R. F. Muirhead[4]) die durch die Funktionalgleichungen $\varphi(x+y) = \varphi(x)\psi(y) + \psi(x)\varphi(y)$ und $\psi(x+y) = \psi(x)\psi(y) - \varphi(x)\varphi(y)$ bestimmten Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ mit ganz elementaren Hilfsmitteln auf und fand, daß unter der Voraussetzung $\varphi(x)^2 + \psi(x)^2 = 1$, $\varphi(x) = \sin x$, $\psi(x) = \cos x$ werden; auch zog er die übrigen durch jene Definitionsgleichungen bestimmten Funktionen in den Kreis seiner Betrachtung; 1896 hat der Italiener G. Fubini[5]) von dem Algorithmus des arithmetischen und geometrischen Mittels ausgehend eine elementare Ableitung der Kreis- und Hyperbelfunktionen geliefert, und 1897 gab Alexander Chessin[6]) mit den modernen Mitteln der Funktionentheorie eine einwandfreie Begründung der ganzen Lehre von den einfach periodischen Funktionen und damit auch von den Kreis- und Hyperbelfunktionen.

Wie diese verschiedenen Versuche zur Begründung einer Theorie der trigonometrischen Funktionen, so gehören auch die Ableitungen, welche bis auf unsere Zeit für die sie darstellenden Potenzreihen, für die Partialbruch-, die Produkt- und Kettenbruchentwicklungen gegeben wurden, sowie die Methoden zur Gewinnung der zyklometrischen Reihen und zur Ableitung und Untersuchung derjenigen Reihen, die

1) Théorie des functions numériques simplement périodiques, Bruxelles 1878 und in neuer Bearbeitung im American Journal of Mathem. I, 1878. Vgl. auch die Darstellung bei S. Günther: „Die Lehre von den gewöhnlichen und verallgemeinerten Hyperbelfunktionen", Halle 1881. — 2) „Die Funktionen Cosinus und Sinus beliebiger Argumente in elementarer Darstellung", Berlin 1881. — 3) Comptes rendus de l'Acad. Franç. LXXXIII, 1876, 594—600. — 4) Proceedings of the Edinburgh Math. Soc. XIV, 1895/96, 127—134. — 5) Periodico di Matem. XII, 169—178. — 6) American Journal of Mathem. XIX, 1897, 217—258. Bemerkt mag noch werden, daß die Ableitung der Periodizität für sin und cos aus den sie definierenden Reihen Baltzer gegeben hat. Element. I, 1860, § 25, Nr. 7, 148—149.

$\cos mx$ und $\sin mx$ (für beliebiges m) durch Potenzen von $\sin x$ und $\cos x$, oder umgekehrt $\sin^m x$ und $\cos^m x$ durch die Sinus und Cosinus der Vielfachen des Argumentes ausdrücken, einer Geschichte der Funktionentheorie an, so daß wir uns auch nach dieser Richtung auf eine kurze Orientierung beschränken können.

Was zunächst die für die Multiplikation und Teilung der trigonometrischen Funktionen wichtigen Entwicklungen von $\cos mx$ und $\sin mx$ anlangt, so finden sich die meisten der hier in Betracht kommenden Gleichungen schon in Mauduits uns längst bekannten „Principes d'Astronomie sphérique" von 1765 in allgemeiner Form, allerdings ohne Beweis zusammengestellt, Lagrange hat dann in seinen „Leçons sur le calcul des fonctions" 10 Reihen für $\cos mx$ und $\sin mx$ angegeben[1]), die teils nach steigenden, teils nach fallenden Potenzen von $\sin x$, resp. $\cos x$ allein fortschreiten, indem er sie mit Hilfe des Moivreschen und des Binomialtheorems ableitete, während Cagnoli[2]) acht unter ihnen nur mit elementaren Mitteln entwickelt hatte. Den 10 Formeln Lagranges fügte dann Lacroix[3]) die noch fehlenden vier hinzu, kümmerte sich aber ebensowenig wie seine Vorgänger darum, welche von diesen Reihen und innerhalb welcher Grenzen sie für einen nicht ganzzahligen Wert von m gültig sind; diese Frage hat erst Cauchy[4]) in seinem „Cours d'Analyse" 1821 für die beiden nach $\cos x$ und $\sin x$ zugleich fortschreitenden Reihen und in seinen „Exercises de mathématiques" 1826[5]) für einige der übrigen endgültig gelöst.[6])

1) A. a. O. 114—117. Was die mit diesen Gleichungen für ganzzahliges m in Beziehung stehende Kreisteilungsgleichungen (sie ergeben sich für $mx = 2k\pi$) anlangt, so bemerken wir nur, daß die Frage ihrer algebraischen Lösbarkeit (S. 153 Anm. 4) durch Gauß' berühmte Disquisitiones arithmeticae Lipsiae 1801, 4°, VII. Abschnitt endgültig erledigt wurde. — 2) Cose Trigonometriche a. a. O. 9 ff. und Trigonometria 1808, 105—107. — 3) Traité du calcul différentiel et integral, 2. Aufl. 1810, 85. — 4) Oeuvres II, Serie III, 248 — 5) Sur l'analyse des sections angulaires, Oeuvres II, Serie VI, 16—17. — 6) Poinsot stellte an Lagrange anschließend in „Recherches sur l'analyse des sections angulaires", Paris 1825, 4°, allgemeinere Entwicklungen von der Form auf: $\cos mx = \frac{1}{2}(i^m + i^{-m}) P_0 + \frac{1}{2}(i^{m-1} + i^{1-m}) m P$, wo $P_0 = 1 + \frac{m^2}{2} \cos^2 x + \frac{m^2(m^2-4)}{4!} \cos^4 x + \cdots$ und $P = \cos x - \frac{m^2 - 1^2}{3!} \cos^3 x + \cdots$ sind, und hielt sie für alle Werte von m für gültig. Brinkley griff ihre Richtigkeit an in Dublin philos. Journal 1826, 291, aber 1841 wurden sie wieder neu abgeleitet in The Cambridge mathem. Journal II, 129. 1830 gab Crelle eine Entwicklung mit Berücksichtigung der Konvergenz im Journal für Mathem. V, 197, 1836 eine solche Grunert im Supplement zu Klügel II, Artikel Goniometrie, und 1845 nach einer neuen Methode R. Moon in Cambridge mathem. Journal IV, 250 und ebenda D. F. Gregory für gebrochenes m. Von neueren

In engster Beziehung zu diesen Reihen stehen die Entwicklungen von $\cos^m x$ und $\sin^m x$ nach Cosinus und Sinus der Vielfachen des Argumentes. Wie wir wissen, hatte schon Euler solche angegeben (S. 108), die für ganzzahlige m völlig richtig sind, dagegen bemerkte Poisson 1811 zuerst[1]), daß sie für gebrochene Werte von m zu falschen Resultaten führen, und diese Bemerkung veranlaßte eine ziemlich umfangreiche Literatur, die sich bis zu einer Abhandlung von Kummer 1835[2]) und noch weiter fortsetzte, auf die wir aber hier nicht näher eingehen können.[3]) Auch in diesem Gebiet hat wieder Cauchy durch seine Konvergenzuntersuchungen zuerst Klarheit geschaffen.

Zur Entwicklung der trigonometrischen Funktionen in Potenzreihen wurden verschiedene Methoden angewandt. Eine ist die Methode der Grenzen, wie Lagrange das von Euler schon in den Introductio (siehe S. 105) gebrauchte Verfahren nannte. Dasselbe ist in präziserer Form nachmals noch oft wiederholt worden. Ganz einwandfreie Ableitungen mit Grenzbetrachtungen hat zuerst Cauchy im Cours d'Analyse[4]) 1821 und in den Résumés analytiques[5]) 1833 gegeben, und zwar an ersterer Stelle, indem er von den Reihen für $\sin mx$ und $\cos mx$ ausging, an der zweiten Stelle, indem er den Grenzwert $\lim_{m=\infty}\left(1+\frac{xi}{m}\right)^m = e^{xi} = \cos x + i \sin x$ benützte und aus der Reihenentwicklung für e^{xi} die beiden Reihen für $\sin x$ und $\cos x$ ge-

---

Arbeiten wollen wir nur Catalan, Nouvelles Ann. 3. Serie II, 1883, 529 und M. d'Ocagne, Nieuw Archief voor wiskunde, Amsterdam XVII, 229—232 anmerken, der eine elementare Ableitung gab. Über Multiplikation und Division der Kreis- und Hyperbelfunktionen schrieb auch W. Trzaska 1878, Denkschr. der Pariser Gesellsch. der exakten W. und F. Caldarera Giornali di Matem. 1897.

1) Corresp. sur l'École Polytechnique II, 212. — 2) Journal für Mathematik XIV, 110. Er gibt dort ganze Klassen von Reihen an, unter denen sich auch einige von Fourier in der Théorie de la chaleur 1822 angeführt finden. — 3) Die ältere Literatur hierüber findet sich in Grunerts oben angeführtem Artikel 700—701 angegeben und deckt sich teilweise mit jener, die wir für die Entwicklung von $\sin mx$, $\cos mx$ anführten. — 4) Oeuvres II, Serie III, 248—254, auch faßte er hier bereits die Konvergenzgrenzen ins Auge. — 5) Oeuvres 2. S. X, 133 ff. Eine Ableitung mit Grenzbetrachtungen, die sowohl von der Anwendung des Imaginären als auch von der Methode der unbestimmten Koeffizienten frei ist, hat Schlömilch 1844 im Archiv für Mathem. V, 326 ff. gegeben; vgl. auch Grunert ebenda 1857, XXIX, 452—473 und seine „Mathematischen Abhandlungen", Altona 1822, I. Sammlung, ferner Supplement zu Klügel I, 508—514. Das Imaginäre benützend hat derselbe 1846 (VIII, 272—317) unter anderem auch die Entwicklung der trigonometrischen Funktionen vom Standpunkte der damaligen Analysis behandelt. — Eine elementare Ableitung gab auch E. Sang im Journal of the r. Soc. of Edinburgh IX, 400—402.

wann. Dagegen entwickelte Lagrange[1]), und viele folgten ihm darin nach, die fraglichen Reihen mit Hilfe der Maclaurinschen Reihe, während wieder andere, darunter Lacroix in seinem vielgelesenen Traité du calcul etc., die alte Methode der unbestimmten Koeffizienten anwandten und die Koeffizienten teils elementar, teils mit Differentialrechnung aufsuchten.[2])

Eigentümliche Reihen hat Schellbach in der schon erwähnten Abhandlung (S. 215, Anm. 4) für alle trigonometrischen Funktionen gegeben[3]), indem er von der Partialbruchzerlegung derselben ausging, die dann später (1868) wieder eingehend Schröter[4]) und 1879 Frenzel[5]) behandelten. Ähnliche Reihen wie Schellbach stellten auch Glaisher[6]) 1878 und David[7]) 1883 auf.

Übrigens zogen diejenigen Autoren, welche sich mit allgemeinen funktionentheoretischen Untersuchungen beschäftigten, natürlich auch die Reihendarstellungen der zyklometrischen Funktionen in den Kreis ihrer Betrachtungen und nahmen auch die schon von Johann Bernoulli und Euler gegebenen Produktdarstellungen der trigonometrischen Funktionen wieder auf. Für die ersteren gab Cauchy die Konvergenzgrenzen an, und was die letzteren betrifft, so war er ebenfalls der erste[8]), der eine strenge Ableitung mitteilte, indem er

---

1) Leçons sur le calcul des fonctions, Leçon V, Oeuvres X, 40—47 und Théorie des fonctions, Paris 1813, Oeuvres IX, Chap. III und IV. — 2) Diese Methode wurde auch in neuester Zeit wieder angewendet, indem z. B. John Jack in den Proceedings of the Edinburgh Math. Soc. VIII, 1894—95, 132—135 die trigonometrischen und zyklometrischen Reihen unter Annahme der Reihenform aus den Additionstheoremen dieser Funktionen ableitete. — 3) A. a. O. 235—236. Schellbach hat 1837 (Journal für Mathem. XVI, 363 und XVII, 32) auch eine eigentümliche geometrische Entwicklung der Potenzreihen transzendenter Funktionen, darunter auch der unsrigen, mit einer eckigen Spirale mitgeteilt. — 4) Zeitschr. für Math. und Phys. XIII, 254. — 5) Ebenda XXIV, 316. — Auch Glaisher gab 1880 in Quarterly Journal of Math. XVII, 211 Ableitungen der Partialbruchreihen für $\operatorname{ctg} x$ und $\operatorname{cosec} x$, und R. D. Bohannan entwickelte 1884 die Funktionen $\frac{1}{\sin x}$, $\frac{1}{\cos x}$, $\operatorname{tg} x$ und $\operatorname{ctg} x$ in Summen von der Form

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} + \sum_1^\infty (-1)^m \left(\frac{1}{x - m\pi} + \frac{1}{m\pi}\right) + \sum_1^\infty (-1)^m \left(\frac{1}{x + m\pi} - \frac{1}{m\pi}\right),$$

Annales of Mathem. I, 49—50. Vgl. auch De Presle, Bulletin de la Société Mathém. de France XVI, 1888, 143—144. — 6) Messenger of Mathematics VII, 77. — 7) Bull. de la Société de France XI, 72—75. — 8) Cours d'analyse algébrique Note VIII und IX. Eine exaktere Gestaltung des Eulerschen Beweises hatte schon S. L'Huilier versucht in Mémoires de l'Académie de Berlin 1788/89, 326, und ein Jahr nach Cauchy gab Grunert, jedenfalls ohne dessen Entwickelung zu kennen, ebenfalls einen

seine Konvergenzuntersuchungen auch auf die Produktform ausdehnte. Später wurde Cauchys Beweis durch O. Rodrigues[1]), Duhamel[2]), Hoppe[3]) und Schlömilch[4]) vereinfacht, Schröter[5]) bemühte sich, eine möglichst elementare Darstellung zu geben, und Frenzel[6]) erhielt die fraglichen Formeln, an Cauchy und Weierstraß anschließend, in seiner Darstellung analytischer Funktionen durch Produkte und Partialbruchreihen, als spezielle Beispiele.

Wenden wir uns nach diesem kurzen Überblick über die analytische Trigonometrie zur elementaren Goniometrie zurück. Die für praktische Zwecke notwendigen Formeln waren längst bekannt, auch die Überführung komplizierterer goniometrischer Relationen zwischen drei Winkeln (gewöhnlich Winkel eines ebenen Dreiecks) in logarithmische Form bot nach allgemeiner Einführung der Eulerschen Schreibweise keine Schwierigkeiten mehr, so daß es auch, wenn dies überhaupt möglich wäre, kein weiteres Interesse böte, den ersten Autor jeder Einzelformel nachzuweisen. Schon in Grunerts Supplement zu Klügels Mathematischem Wörterbuch 1836 (II, 611—622) findet sich eine Menge solcher Relationen zusammengestellt, und in den größeren Kompendien der Neuzeit fanden dieselben noch bedeutende Vermehrung.

Eine wirkliche Bereicherung erhielten die Formelsysteme der Goniometrie im Laufe des 19. Jahrhunderts durch die zahlreichen Identitäten zwischen den Funktionen mehrerer Winkel, welche teils bei praktischen Reduktionen, teils im Anschluß an die Aufstellung der Formelgruppen in der Theorie der elliptischen Funktionen gefunden wurden. Gauß gab schon 1809 in seiner „Theoria motus" (p. 92) bei Gelegenheit der Aufsuchung der Beziehungen verschiedener Bahnörter eines Planeten die Identitäten:

Beweis für die Produktzerlegung in seinen „Mathemat. Abhandlungen", Altona 1822, I. Sammlung, der jedoch jenen Cauchys an Strenge nicht erreichte. — Allgemein ist zu bemerken, daß wohl Gauß schon 1812 in seiner Arbeit über die hypergeometrische Reihe (Werke III) ein erstes Beispiel einer exakt durchgeführten Konvergenzbetrachtung für die Reihen gegeben hat, und daß Bernhard Bolzano 1817 die allgemeine Konvergenzbedingung sogar strenger als vier Jahre später Cauchy faßte, daß aber erst des letzteren Lehrbuch den Gedanken von der Notwendigkeit exakter Konvergenzuntersuchungen in weitere Kreise brachte. Über die Konvergenz unendlicher Produkte vgl. auch Pringsheim, Math. Ann. XXXIII, 119 ff.

1) Journal de Mathém. pures et appl. VIII, 1843, 217. — 2) Ebenda XIX, 1854, 121. — 3) Archiv für Mathem. XXVII, 1856, 170. — 4) Zeitschr. für Mathem. und Phys. III, 1858, 389. — 5) Ebenda XIII, 1868, 254. — 6) Ebenda XXIV, 1879, 316.

$$\sin A \sin (C - B) + \sin B \sin (A - C) + \sin C \sin (B - A) = 0$$

und

$$\cos A \sin (C - B) + \cos B \sin (A - C) + \cos C \sin (B - A) = 0,$$

welche 1812 Mollweide wiederfand[1]) und aus dem Ptolemäischen Satze für das Sehnenviereck ableitete. Der berühmte Astronom F. W. Bessel[2]) (1784—1846) kam bei der Auffindung des von ihm für neu gehaltenen Pascalschen Satzes vom Sechseck auf die Identität:

$$\cos (B - b) \sin (A + a + N) - \cos (A - a) \sin (B + b + N)$$
$$= \sin (a - b) \cos (A + B + N) + \sin (A - B) \cos (a + b + N),$$

von der es 10 „Varietäten" gäbe. 1876 teilte A. Cayley[3]) die Identität mit:

$$\begin{vmatrix} \sin (A + F) \sin (B + F) \sin (C + F), & \cos F, & \sin F \\ \sin (A + G) \sin (B + G) \sin (C + G), & \cos G, & \sin G \\ \sin (A + H) \sin (B + H) \sin (C + H), & \cos H, & \sin H \end{vmatrix} = 0,$$

wenn $A + B + C + F + G + H = 0$ ist, während R. F. Scott[4]) für den Fall des Nichtbestehens dieser Bedingungsgleichung eine ähnliche Relation angab. Aus dem Jahre 1880 stammt dann eine Reihe von sehr allgemeinen Identitäten zwischen 4 Winkeln, die J. W. Glaisher (geb. 1848) aufstellte. Die eine Gruppe gewann er, indem er in algebraischen Identitäten die Größen durch Winkelfunktionen ersetzte[5]), die andere Gruppe folgte aus Formeln über elliptische Funktionen, wenn man dem Modulus k den Wert Null erteilte.[6]) Von den ersteren führen wir als Beispiel nur die Relation an:

$$\sin a \sin b \sin c \sin d = \sin a' \sin b' \sin c' \sin d' + \sin a'' \sin b'' \sin c'' \sin d'',$$

wo $a' = \frac{1}{2}(- a + b + c + d)$, $b' = \frac{1}{2}(a - b + c + d)$ u. s. w. $a'' = \frac{1}{2}(a + b + c + d)$, $b'' = \frac{1}{2}(a + b - c - d)$ u. s. w. gesetzt ist; eine Formel der zweiten Gattung ist:

$$s_1 s_2 (s_1^2 + s_2^2) + s_3 s_4 (s_3^2 + s_4^2) + s_5 s_6 (s_5^2 + s_6^2) - 4 s_1 s_2 s_3 s_4 s_5 s_6 = 0,$$
$$s_1 = \sin A,\ s_2 = \sin (B - C),\ s_3 = \sin B,\ s_4 = \sin (C - A),\ s_5 = \sin C,$$
$$s_6 = \sin (A - B).$$

1) Zach, Monatl. Correspondenz XXVI. — 2) Werke I, 358, oder Briefwechsel mit Olbers II, 138. — 3) Messenger of Mathem. V, 164 oder Collected papers X, 16. — 4) Messenger of Mathem. VIII, 155. — 5) Proceedings of the Cambridge Philosoph. Soc. III, 1880, 319—329 und Messenger of Math. VIII, 46, 47, 54—56. Cayleys Identität ergibt sich hier als spezieller Fall einer weit allgemeineren. Ferner gab Glaisher Identitäten an in Messenger IX, 124 und in Association Française 1880. — 6) Messenger of Math. VIII, 95—97 und Report of the British Association 1880, 477. Ähnlich Hart in Messenger IX, 191.

Mit Glaishers Identitäten haben sich auch Charles Hermite[1]) (1822—1901) und N. Goffart[2]) beschäftigt, ersterer, indem er ein Resultat Glaishers verallgemeinerte, und letzterer, indem er die mit elliptischen Funktionen erhaltenen Formeln elementar ableitete. Die hier von Hermite erhaltene sehr allgemeine Relation lautet: Ist $f(x) = \frac{\sin(x-f)\sin(x-g)\cdots\sin(x-s)}{\sin(x-a)\sin(x-b)\cdots\sin(x-l)}$, wo im Zähler und Nenner gleich viele Faktoren stehen, dann folgt

$A + B + \cdots + L + F + \cdots + S = 0$, wenn $A = f(a)$, $B = f(b) \cdots$ (mit Weglassung der verschwindenden Faktoren), so daß z. B.

$$A = \frac{\sin(a-f)\sin(a-g)\cdots\sin(a-s)}{\sin(a-b)\sin(a-c)\cdots\sin(a-l)} \text{ ist.}^{3)}$$

Außer dem von Glaisher angewandten Übertragungsprinzip algebraischer Relationen in trigonometrische haben George Dostor und Emile Lemoine noch andere in Vorschlag gebracht. Ersterer zeigte[4]), daß man aus jeder Relation zwischen den Winkeln eines Dreiecks eine neue erhält, wenn man die Winkel entweder durch die Komplemente ihrer Hälften oder durch die Supplemente ihrer doppelten Werte ersetzt, letzterer aber gab ein noch allgemeineres Transformationsverfahren an.[5]) Sind nämlich A, B, C drei Winkel eines ebenen Dreiecks, also $A + B + C = \pi$, hat man zwischen ihnen eine Identität $F(A, B, C) = 0$ und ersetzt man in ihr A durch $f_1(A, B, C)$, B durch $f_2(A, B, C)$ und C durch $f_3(A, B, C)$, wobei wieder $f_1 + f_2 + f_3 = \pi$ ist, so ist $F(f_1, f_2, f_3) = 0$ eine neue Identität zwischen den Winkeln A, B, C. Als speziellen Fall behandelt er dann die fruchtbarste dieser Transformationen, nämlich $A = -A$, $B = \pi - B$, $C = \pi - C$, die allein von praktischem Interesse ist, und nennt sie „transformation continue.“ Mit ihr ergeben sich auch aus den bekannten trigonometrischen Sätzen andere teils neue, teils auf direktem Wege schwerer zu erhaltende.

---

1) Nouvelles Annales 3. Serie IV, 1885, 57. — 2) Ebenda 1884, III, 104—109. — 3) Vgl. auch eine hierher gehörige, aber weit weniger allgemeine Identität zwischen drei Winkeln, die Fouret 1883 in Nouv. Ann. Serie 3, II, 262—265 anschließend an II, Serie 2, 523 entwickelte. — Formeln über Dreieckswinkel veröffentlichten Abbé E. Gelin in Mathesis 1888 Suppl. und Catalan, ebenda 133 in großer Zahl. — 4) Nouvelles Ann. 1880, S. 2, XIX, 362—367. Vgl. auch Archiv für Mathem. LXV, 1880, 188—192. — 5) Nouv. Ann. 1893, S. 3, XII, 20—36, sowie in Association Française 1891, 118—130; 1892, 58—64, 81—92, in Mathesis 1892, 58 und 81, in Nouv. Ann. 1893, 20—36, Mathem. Papers read at the intern. Congress of Chicago, New York 1896, 155—164, ferner noch im Journal élémentaire 1892, 62, 91, sowie in Proceedings of the Edinburgh math. Soc. 1895, XIII, 2—25. Vgl. auch Ponlain im Journ. élémentaire 1892, 110, 133, 151 und Michel, ebenda 1893, 29—33.

§ 6. Die Zyklometrie im 19. Jahrhundert. Tafeln.

Wir haben schon erwähnt, daß die Behandlung der längst bekannten Reihen für die zyklometrischen Funktionen parallel ging mit jener der trigonometrischen[1]), was einerseits in der Zusammengehörigkeit der beiden Funktionsklassen, teils darin seinen Grund hat, daß man sie eben nur mehr als Glieder der allgemeinen Funktionentheorie auffaßte, die sich unserer weitern Berichterstattung entzieht. Doch wollen wir auf einige Einzelheiten hinweisen, die eine Sonderstellung einnehmen, und namentlich die Auffassung des Quadratur- und Rektifikationsproblems für den Kreis, die das 19. Jahrhundert brachte, kurz besprechen.

Zunächst treffen wir im Jahre 1815 auf eine Abhandlung von Stainville[2]) (Mélanges d'analyse), in welcher er φ^2 durch eine nach steigenden Potenzen von $\sin\varphi$ fortschreitende Reihe darstellte; hieran anschließend gab dann 1828 Scholz[3]) eine ebensolche für φ^n, und Scherk stellte 1834[4]) auf anderem Wege als seine Vorgänger das Koeffizientengesetz für diese Reihe auf. Vielfach neu abgeleitet wurde auch die von Euler herstammende Produktentwickelung

$$x = \sin x : \left\{\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3}\cdots\right\},$$

(S. 117), welche für $x = \frac{\pi}{2}$ zu Vietas bekannter Darstellung von π führt; wir nennen nur A. Grunert[5]), L. Réalis[6]) und L. Seidel[7]), die sich hiermit beschäftigten, während Dobinski[8]) Produkte von der Form $\prod_x \cos(2^{x-1}\alpha)$, $\prod_x \cos\frac{\alpha}{2^x}$ betrachtete und im speziellen daraus Vietas Formel ableitete. Letztere gewannen auch Barrois[9])

1) Daraus folgt jedoch nicht, daß nicht auch bis in die neueste Zeit herein selbständige Ableitungen der Arcusfunktionen erschienen, teils mit elementarer, teils mit höherer Rechnung. Solche Einzelarbeiten lieferten Raabe, der 1843 eine Ableitung der Reihe für $\arcsin x$ mit Integralrechnung gab: Journal für Mathem. XXV, 169, dann Chevilliet in Nouvelles Annales XIII, 1874, 209, L. Geoffroy und V. Jamet gaben elementare Entwicklungen für $\operatorname{arctg} x$ in Recueil mathématique à l'usage des écoles spéciales V, 1881, 49 und 97, sowie in Mathesis II, 52. Ebenso R. Chartres in Nature XLII, 1890, 341 und F. Giudice, der in Periodico di Matematica V, 33—35 eine elementare Herleitung der Reihe für $\arcsin x$ mitteilte u. s. w. — 2) Vgl. auch die Darstellung von Grunert im Supplement zu Klügel I, 529—533. — 3) Journal für Mathem. III, 70. — 4) Ebenda XI, 101—116. — 5) Mathem. Abhandlungen 1822. — 6) Nouv. Ann. 2. Serie IX, 1870, 12—20. — 7) Journal für Mathem LXXIII, 273—292. — 8) Archiv für Mathem. LXI, 1878, 434—438. — 9) Annales de Mathem. von Gergonne IV, 360—364.

1813, Grebe und Scheffler[1]) 1849 und wieder neuerdings Ligowski[2]), Dickstein[3]) und Glaisher[4]) in etwas allgemeinerer Gestalt auf ganz elementarem Wege, die letzteren beiden jedoch, wie es scheint, ohne Kenntnis der Vorarbeiten. (Vgl. auch S. 117, Anm. 1).

Damit sind wir zur Besprechung der Fortschritte gelangt, welche im 19. Jahrhundert in der Behandlung des Problems der Quadratur und Rektifikation des Kreises gemacht wurden, müssen aber auch hier, wie in den frühern Kapiteln, die denselben Stoff behandelten, auf eine detaillierte Darstellung verzichten. Die einschlägigen Untersuchungen erstrecken sich nach drei Richtungen. Einmal wurden neue Reihen für die Zahl π aufgestellt, dann wurde die numerische Berechnung und die angenäherte konstruktive Darstellung derselben gefördert und endlich der zahlentheoretische Charakter dieser Zahl ergründet, wodurch die endliche Erledigung des Jahrtausende alten Problems der Kreisquadratur, allerdings in negativem Sinne, möglich ward.

Was die Darstellung von π durch unendliche Reihen anlangt, so hat J. W. L. Glaisher eine ganze Menge von Reihen mitgeteilt, die er aus den Entwicklungen

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-\pi} + \frac{1}{x+\pi} + \frac{1}{x-2\pi} + \frac{1}{x+2\pi} + \cdots$$

und

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-\pi} - \frac{1}{x+\pi} + \frac{1}{x-2\pi} + \frac{1}{x+2\pi} - \cdots$$

erhielt[5]), unter denen sich natürlich auch schon bekannte befinden; auch neue Kettenbruchentwicklungen gibt er daselbst an.[6]) Grunert und Beltrami, Alexéjeff und Dobinski[7]) fanden unabhängig von-

1) Archiv für Mathem. XII, 1849, 181 und XIII, 419. — 2) Archiv für Mathem. LV, 1873, 218. — 3) Ebenda LVI, 332. — 4) Messenger of Mathem. 2. Serie, VII, 1878, 191 und ebenda IX, 124, siehe auch Hart 191. Eine Separation der in Vietas Formel übereinander liegenden Wurzeln hat Maurice Fouché gegeben: Bullet. de la Société de France. XVIII, 1890, 135—138. — 5) Quarterly Journal of Math. XII, 1872, 232—239. Vgl. auch Messenger of Math. VII, 1878, 77 (S. 219 Anm. 6). Die eben mitgeteilten Reihen für ctg x und cosec x hat schon Euler in der Introductio in Analysin I, Nr. 178 gegeben. Vgl. auch Lebesgue im Journ. des Mathém. XI, 1846, 78. — 6) Der schon von Euler in Comm. Acad. Petrop. XI, 1739, 48 gegebene Kettenbruch wurde wieder neu gefunden von Stern, Journal für Mathem. 1833, X, 1—22 und von Sylvester, Philosoph. Magazine 1869, XXXVII, 373—375. Glaisher wies dann im Messenger of Mathem. IV nach, daß derselbe aus einer Differentialgleichung erhalten werden kann. — 7) Grunert: Archiv für Mathem. 1867, XLVII, 362. Dort zitiert er Beltrami, Giornale di matem. 1867, 189 und bemerkt, daß Antonio Boiti die Relation bewiesen habe. — Alexéjeff in Bulletin de Mathém. von Darbaux 2. S. I, 44. — Dobinski, Archiv für Mathem. LXIII, 1878, 400. Siehe auch die Reihe p. 380.

einander die Reihe $\sum_{x=1}^{x=\infty} \operatorname{arctg} \frac{2}{x^2} = \frac{3\pi}{4}$, E. Catalan[1]) gab 1865 die Reihe:

$$\frac{\pi}{\cos\frac{\pi z}{2}} = \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots p}{(1+z)(3+z)\cdots(2p+1+z)} + \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots p}{(1-z)(3-z)\cdots(2p+1-z)},$$

welche für $z = 0$ eine schon seit Euler bekannte und nachmals wiederholt abgeleitete Reihe für π enthält[2]), und F. Lucas[3]) teilte die rasch konvergente Reihe

$$\frac{\pi}{4} = 1 - 16 \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{1}{(4m+1)^2(4m+3)^2(4m+5)^2}$$ mit.

Die numerische Berechnung der Zahl π wurde im 19. Jahrhundert bedeutend gefördert, allerdings weniger in der Verbesserung der Methoden, die in der Hauptsache dieselben blieben, wie sie J. Machin angeregt und Euler ausgebildet hatte, als vielmehr in der Vermehrung der Stellenzahl für π. So hat William Rutherford[4]) (1798—1871) 1841 aus der Formel $\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{70} + \operatorname{arctg} \frac{1}{99}$ 208 Dezimalen berechnet, wovon aber nur 152 richtig sind; der bekannte Schnellrechner Johann Dase[5]) bestimmte 1844 205 Dezimalen aus der Formel $\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{5} + \operatorname{arctg} \frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$, von denen 200 korrekt sind. Selbst Gauß[6]) beschäftigte sich in zwei Perioden seines Lebens, am Anfang des Jahrhunderts und 1846—1847, mit der Berechnung von π aus den Formeln: $\frac{\pi}{4} = 12 \operatorname{arctg} \frac{1}{18} + 8 \operatorname{arctg} \frac{1}{57} - 5 \operatorname{arctg} \frac{1}{239}$ $= 12 \operatorname{arctg} \frac{1}{38} + 7 \operatorname{arctg} \frac{1}{239} + 20 \operatorname{arctg} \frac{1}{57} + 24 \operatorname{arctg} \frac{1}{268}$. Hierauf bezügliche Rechnungen fanden sich in seinem Nachlaß. Thomas Clausen (1801—1885) lieferte ferner 1847 248 richtige Stellen für π[7]) und William Shanks und Rutherford[8]) gaben 1853, der

1) Mémoires de l'Académie Belgique XXXIII. — 2) Sie findet sich in den Institutiones calculi differentialis, pars II, Petersburg 1755, 295, ergibt sich auch aus der von uns schon S. 115 angeführten Reihe Eulers und wurde nachmals z. B. von Polster in den Blättern für das bayr. Gymnasial- und Realschulwesen XV und im Archiv für Math. LXIII, 1879 wieder abgeleitet. — 3) Comptes rendus de l'Acad. de Paris CXII, 1891, 1050—1051. — 4) P. T. 1841, 283, vgl. auch Proceedings of the Royal Society 1853, VI. — 5) Journal für Math. XXVII, 198. Die Berechnung geschah in zwei Monaten, veranlaßt von Professor Schulz Strasznicky in Wien. — 6) Werke II, 497, Bemerkung von Schering hierzu p. 525. Vgl. auch E. Frisby, Bull of the philos. Society of Washington I, 1880, 57—61. — 7) Astronomische Nachrichten XXV, col. 207. — 8) Proceedings of the Royal Society 1853, 273 oder „Contributions of Mathematics comprising chiefley the Rectification of the Circle", Durham 1853.

erstere 607, der letztere 440 richtige Dezimalen an, während Richter[1]) in Elbing, der diese Rechnungen nicht kannte, π zuerst auf 333, dann auf 400 und schließlich auf 500 Stellen bestimmte. Am weitesten aber trieb Shanks die Rechnung, indem er 1873/74 707 Dezimalen erbrachte.[2])

Außer der stellenweisen Berechnung der Zahl π wurde auch die näherungsweise Rektifikation und Quadratur des Kreises vielfach gefördert. Da wir jedoch keine Geschichte der Kreisquadratur schreiben, so heben wir aus den zahlreichen fast in jedem Jahre erschienenen Arbeiten hierüber nur einige, die uns die wichtigsten dünken, heraus. Gergonne erwähnt im VIII. B. der Annales de Mathématiques 1818 mehrere angenäherte Rektifikationen, so eine von 1798[3]), dann eine von 1816 von unbekanntem deutschen Autor aus der Formel $\pi = \frac{1}{8}\sqrt{6(20 - 3\sqrt{3})} = 3{,}1415|3\ldots$[4]) und endlich die beste von Pioche, welche auf der Formel $\pi = \frac{501 + 80\sqrt{10}}{240} = 3{,}1415925|534\ldots$ beruht und also π auf 7 Stellen genau gibt. Eine ähnliche gab erst wieder 1901 E. Reichenbächer in Halle.[5]) 5 richtige Dezimalen von π liefert die von einem Studenten Specht[6]) 1828 gegebene Formel $\pi = \frac{13}{50}\sqrt{146} = \frac{1}{2}\cdot\frac{13}{5}\sqrt{1 + (\frac{11}{5})^2}$, welche leicht geometrisch zu konstruieren ist. 1849 gab Grunert[7]) eine einfache geometrische Konstruktion des bekannten Näherungswertes $\frac{355}{113} = 3 + \frac{4^2}{7^2 + 8^2}$ für π; W. Hayden[8]) stellte 1872 die Näherungsformel auf:

$$\pi = \frac{\sqrt{3 + 4m} + 2m^2 - m}{1 + m^2}, \text{ welche für } m = \frac{2 + r\sqrt{17 - 4r^2}}{8 - 2r^2},$$

$r = \frac{3}{20}(\sqrt{10} - \sqrt{5})$ $\pi = 3{,}141592|7\ldots$ liefert; F. J. van den Berg[9]) gab 1878 8 Näherungskonstruktionen an und A. H. Anglin

1) Archiv für Mathematik XXI, 119, XXII, 473, XXIII, 1854, 475 (Berichtigungen), XXV, 1855, 471—472 und Elbinger Anzeiger Nr. 85, 1854. — 2) Proceedings of the Royal Soc. XXI 318—319 und XXII, 45—46. Alle diese Rechner bedienten sich im Grunde genommen derselben Methode. Zu verbessern suchte sie Lehmann, indem er (Archiv für Mathem. XXI, 121) die Arcustangensreihe durch Multiplikation mit gewissen Größen konvergenter zu machen suchte. Darin glaubte er den von Lagny seiner Zeit angewandten Kunstgriff erkennen zu müssen. Eine etwas andere Einrichtung als die genannten gab Studnička den Formeln zur Berechnung von π: Věstnik VIII, Nr. 6, 305—308, vgl. Fortschritte der Mathem. 1899. — 3) In Mascheronis Géométrie du compas, 248 der französischen Übersetzung von Duprat. — 4) Bibliothèque universelle III, 221. — 5) Zeitschrift für math. und naturw. Unterricht XXXII, 275. — 6) Journal für Mathem. III, 83 und 405. — 7) Archiv für Mathem. XII, 98. — 8) Proceedings of the Royal Soc. of London XX, 525—526. — 9) Nieuw Archief voor wiskunde, Amsterdam IV, 200—204.

1884/85 deren 9[1]). 5 Dezimalen liefert endlich auch die Formel $\pi = 3 + \frac{1}{10}(\cos 15^0 + 0{,}45)$ von Jičinsky[2]), während die nur 2 beziehungsweise 3 Dezimalen liefernden Formeln $\pi = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ [3]), und $\pi = \sqrt{51} - 4$[4]) einfache Konstruktionen veranlassen. Auch die Japaner haben sich mit Herstellung von Näherungsformeln beschäftigt. (Vgl. hierüber die Zeitschrift der phys.-mathematischen Gesellschaft in Tokio, VII, 24—26 und VIII, 47—53.)

Die Frage, ob die Lösung des uralten Problems der Kreisquadratur mit Zirkel und Lineal möglich sei, hatte, wie wir sahen, schon verschiedene hervorragende Geister beschäftigt und die allmählich erstarkende Analysis ermöglichte es Lambert und Legendre am Ende des 18. Jahrhunderts, in der Beantwortung dieser Frage einen bedeutenden Schritt vorwärts zu tun, indem sie dieselben in den Stand setzte, die Irrationalität von π zu beweisen. Im 19. Jahrhundert hat Gauß[5]) einen neuen und strengen Beweis hierfür erbracht, der übrigens erst durch die vor kurzem erfolgte Veröffentlichung aus seinem Nachlaß bekannt wurde, und der auf dem Gebiete der Algebra rühmlichst bekannte Italiener Paolo Ruffini glaubte sogar einen Beweis für die vollständige Unmöglichkeit der Lösung des Problems im genannten Sinne erbringen zu können[6]), indem er an Untersuckungen von Newton (S. 66 Anm. 1) anknüpfte. Ein solcher Beweis konnte jedoch erst gelingen, nachdem Joseph Liouville (1809—1882) 1844 und 1851[7]) auf die transzendenten Zahlen aufmerksam gemacht, ihre Definition und einen Beweis ihrer Existenz gegeben hatte, der von Georg Cantor 1874 wesentlich vereinfacht wurde.[8]) An Ch. Hermites Nachweis der Transzendenz der Zahl e[9]) anknüpfend, gelang es endlich Ferdinand Lindemann (geb. 1852) 1882[10]) die Frage über die Kreisquadratur in dem Sinne zum Abschluß zu bringen, daß eine geometrische Lösung auf algebraischer Grundlage (d. h. mit algebraischen Kurven oder Flächen) überhaupt

1) Messenger of Mathem. 2. Serie XIII, 165—167 und XIV, 185—189. — 2) Mitgeteilt von Studnička: Véstnik VIII, Nr. 6, 305—308. — 3) Im Journal de Mathém. élémentaires 4. Serie IV, 1895, 77 gibt D'Ocagne nach dieser Formel eine sehr einfache Konstruktion. — 4) Ant. Pleskot ebenda 125—126. Vgl. auch E. Lemoine, Bull. de la Société Mathém. de France XXIII, 242—255. — 5) Gauß' Werke VIII, 1900, 27—29. Vgl. auch Ch. Hermites Beweis für die Irrationalität von π^2, Journal für Mathem. LXXVI, 1873, 342—344. — Über Kreisbögen mit rationaler Tangente vgl. Prouhet, Journal de Mathém. I, 1856, 215—222. — 6) Memorie della Società Italiana IX, 1801, 527—557, vgl. auch T. V. Caluso ebenda 558—564. — 7) Comptes rendus de l'Acad. de Paris 1844 XVIII, 883—885 und Journal de Mathém. XVI, 1851, 133—142. — 8) Journal für Mathem. LXXVII, 1874, 258—262. — 9) Comptes rendus 1873, LXXVII, 18, 74, 226, 285. — 10) Mathematische Annalen XX, 1882, 213—225.

nicht möglich ist. Lindemanns Beweis wurde dann von Karl Weierstraß[1]) 1815—1897), von David Hilbert[2]) und Paul Gordan[3]) noch vereinfacht.

Unter den Tafeln zur Ausführung trigonometrischer Rechnungen nehmen im 19. Jahrhundert nach wie vor die Logarithmentafeln die erste Stelle ein; doch wurde seit der Berechnung der großen Tables du Cadastre am Ende des 18. Jahrhunderts eine völlige Neuberechnung der Logarithmen erst wieder durch den Schotten Ed. Sang (1805—1890) unternommen, der 1859 eine fünfstellige und 1871 eine siebenstellige Tafel der Zahlenlogarithmen veröffentlichte.[4]) In der Vorrede hierzu gibt er an, daß er die Logarithmen der Zahlen von 1 bis 10 000 mit 28 Stellen, sowie die von 100 000 bis 370 000 mit 15 Stellen berechnet habe. Ferner ging er zur Bestimmung der natürlichen Sinus auf die Dezimalteilung des Quadranten zurück[5]), indem er ähnlich wie Briggs dieselbe durch Zwei- und Fünfteilung bewerkstelligte; er gebrauchte also durchweg die ältere Methode und sah von der Benützung der Reihen vollständig ab.[6]) Veröffentlicht wurde seine Tafel der trigonometrischen Funktionen jedoch, wie es scheint, nicht.

Sang hat auch in einer umfangreichen und sehr gehaltvollen Abhandlung über rationale Trigonometrie[7]) eine Tafel berechnet, welche diejenigen Winkel gibt, deren sämtliche trigonometrische Funktionen rational sind. Dieselbe läßt zur Hypotenuse c und den

---

1) Sitzungsberichte der Berliner Akademie 1885, 2. Tl. 1067—1085. — 2) Mathem. Annalen XLIII, 1893, 216—219. — 3) Ebenda 222—224. — Vgl. die übersichtliche Zusammenfassung und lichtvolle Behandlung der hier erwähnten Methoden bei Felix Klein, Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie, herausgegeben von F. Tägert, Leipzig 1895, ferner Sylvester, Comptes rendus CXI, 778 und 866 und Saalschütz, Königsberger physik. ökonom. Gesellsch. XXXV, 1894, 23. — 4) A new table of seven-place logarithms of all numbers from 20 000 to 200 000. London 1871, 2. Aufl. 1883. Sang hat auch eine Subskription auf eine neunstellige Tafel der Logarithmen der Zahlen von 100 000 bis 1 000 000 mit ersten Differenzen eröffnet, von ihrem Erscheinen ist jedoch nichts bekannt. Zur Neuberechnung wurde er veranlaßt, da er, wie schon S. 151 Anm. 2 bemerkt, aus verschiedenen Angaben über die Tables du Cadastre schließen zu müssen glaubte (Proceed. of the R. Soc. of Edinburgh VIII, 1875, 421, 581), daß diese Tafeln keineswegs zuverlässig seien. Dagegen hat sie Lefort wieder in Schutz genommen (ebenda 563, 578). — 5) Ein Verzeichnis der Tafeln mit Dezimalteilung des Quadranten findet sich in R. Mehmkes Bericht über die Winkelteilung. Jahresbericht der deutschen Mathematikervereinigung VIII, 1900, Anm. 20. — 6) Eine genaue Darlegung seiner Methode in Proceed. of the R. Soc. of Edinburgh IX, 1876/77, 345—352. Vgl. ferner C. Wendt, Monatshefte für Mathem. X, 1899, 97—100. — 7) Transactions of the R. Soc. of Edinburgh XXIII, 1864, 721 ff.

beiden Katheten a und b eines rechtwinkligen Dreiecks den spitzen Winkel ablesen und läuft bis zur Primzahl $c = 997$.

1875 gab der Schwede M. Wiberg eine mit der von ihm konstruierten Differenzenmaschine berechnete ausführliche siebenstellige Logarithmentafel heraus[1]), die nach dieser ihrer Entstehung zu schließen wohl fehlerfrei sein dürfte, und auf Neuberechnung und Vergleich mit Vegas Thesaurus beruhen auch die zehnstelligen Tafeln, welche W. W. Duffield 1895/96 veröffentlichte.[2]) Endlich wurde 1891 ein achtstelliger Auszug der Kadastertafeln nach sorgfältiger Revision vom Service géographique de l'Armée in Frankreich herausgegeben[3]), und 1896 vom Istituto geografico militare zu Florenz ein revidierter Neudruck von Vegas Thesaurus besorgt. Die übrigen Tafeln, welche im 19. Jahrhundert in enormer Anzahl[4]) erschienen, sind sämtlich aus den Tafeln von Briggs und Vlacq entnommen, jedoch nicht ohne daß diese einer gründlichen Prüfung unterzogen wurden. Namentlich hat sich hierbei außer den verschiedenen Herausgebern von Tafeln[5]) A. Gernerth[6]), dem wir schon früher begegneten, hervorragende Verdienste erworben. Übrigens sind die Anforderungen an die Korrektheit der letzten Stellen in den Tafeln seit dem 18. Jahrhundert bedeutend gestiegen, wozu namentlich Gauß' schon erwähnte Bemerkungen zu dem Thesaurus logarithmorum Vegas beitrugen. Gauß baute seine Untersuchung auf den Grundsatz auf, „daß die Tabulargröße dem wahren Werte allemal so nahe kommen soll, als bei der gewählten Anzahl von Dezimalstellen möglich ist, und daß folglich die Abweichung niemals mehr als eine halbe Einheit der letzten Dezimalstelle betragen dürfe". Dagegen hält Glaisher die

1) Logarithm Tabeller, uträknade och tryckte med räknemaskin af Dr. M. Wiberg, Stockholm 1875, vgl. Mathem. Encyklopädie I, 1901, 978 und 988 Anm. 236. — 2) Report on the U. S. Coast and Geodetic Survey 1895/96, Washington 1897, Appendix 12, 422—722. — 3) Tables des logarithmes à huit décimales, Paris 1891 — die ersten achtstelligen Tafeln seit jenen von John Newton 1658. — 4) Die umfassendsten Verzeichnisse sind der von uns schon oft benützte Report of the Commitee etc. von Glaisher in Reports of the British Association 1873, London 1874 und das von Bierens de Haan: Tweede ontwerp eener naamlijst van Logarithmentafels. Amst. Verh. XV, 1875, 1 ff. Dieser führt von 1800—1873 nicht weniger als 334 Tafeln an. — 5) Vgl. z. B. Ch. Babbage, Tables of logarithms, London 1827, 2. Aufl. 1831, 3. Aufl. 1834; Bremiker, Logarithmorum VI decimalium nova tabula, Berolini 1852, 11. Aufl. 1890; Shortrede, Logarithmic tables, Edinburgh 1844; Schrön, Siebenstellige gemeine Logarithmen, Braunschweig 1860, 24. Aufl. 1900 u. s. w. — 6) Bemerkungen über ältere und neuere mathem. Tafeln, Zeitschrift für das österreichische Gymnasialwesen XIV, 1863, 407—443. Die Stellen, an denen Fehler in den Tafeln von Vlacq angegeben sind, hat Glaisher gesammelt: Monthly Notices of the R. Astron. Soc. XXXII, 1872, 255.

Forderung für genügend, der Tafelwert solle nie um mehr als 0,555 ... einer Einheit der letzten Dezimale falsch sein[1]), während N. E. Lombolt[2]) sogar noch weiter als Gauß geht, indem er die letzte Ziffer so wählt, daß bei allen mittelst der Tafel gefundenen Logarithmen die durchschnittliche Abweichung von ihrem wahren Werte ein Minimum wird.[3])

Während man im 18. Jahrhundert größtenteils mit sieben- und mehrziffrigen Logarithmen rechnete, ist man im 19. Jahrhundert für manche Zwecke allmählich bis auf vierstellige Tafeln zurückgegangen. Die älteste unter ihnen in diesem Jahrhundert ist wohl die von J. F. Encke[4]) von 1828; ferner seien noch erwähnt die vierstellige logarithmisch-trigonometrische Handtafel von F. G. Gauß, Berlin 1873 (3. Aufl. 1899), H. Schoders logarithmische und trigonometrische Tafeln mit vier und drei Stellen in Taschenformat, Stuttgart 1866 (2. Aufl. 1869) und H. Schuberts Tafeln und Gegentafeln mit vier Stellen, Leipzig 1898 in 12°. Doch sind fünfstellige Tafeln in den Schulen noch immer am meisten in Gebrauch.[5]) Die Logarithmen der Sekanten und Cosekanten werden jetzt wenig mehr angegeben; eine Ausnahme machen die Tables de Logarithmes à cinq décimales etc. von J. Hoüel, Paris 1858 (Neuauflage 1890), welche auch diese für alle Minuten der Winkel geben.

Übrigens wurden auch trotz des vorwiegenden Gebrauches der Logarithmen den meisten Tafelsammlungen noch kleinere Tabellen für die natürlichen goniometrischen Funktionen beigegeben und sogar solche auf große Stellenzahl berechnet. So hat J. Herrmann 1848[6]) eine Methode angegeben, um die trigonometrischen Funktionen bis zu einer beliebigen Stellenzahl zu berechnen, und eine von Grad zu Grad fortschreitende Tafel auf 30 Dezimalen beigefügt, weiter gab er noch eine Tabelle mit, welche die Bogenlängen für $r = 1$ von 1″ bis 60″ auf 35 Stellen enthält. Für seine Rechnungen bediente er sich zum Teile der Reihen. Endlich erschien 1897 eine Neuausgabe der Haupttafel des uns wohlbekannten „Opus Palatinum", von Rhäticus durch W. Jordan veranstaltet. Wie in jener alten Tafel schreiten die Winkel in Intervallen von 10″ fort, jedoch

1) Monthly Notices of the R. Astr. Soc. XXXIII, 1873, 440 ff. — 2) Fircifret Logarithmetabel, Kjöbenhavn 1897. — 3) Vgl. über die letzten Bemerkungen R. Mehmke in der Mathem. Encyklopädie I, 988—989. — 4) Ebenda 992. Übrigens hat 1787 J. van Swinden schon eine vierstellige Tafel gegeben. — 5) Erwähnt mögen werden die fünfstelligen Tafeln und Gegentafeln von H. Schubert, Leipzig 1897, 8° mit Verbesserungen in der Anordnung, sowie die Tafeln des Dänen V. E. Gamborg: Logaritmetabel indeholdende Logaritmer og Antilogaritmer etc., Kjöbenhavn 1897. — 6) Sitzungsberichte der Wiener Akademie I_4, 164—180.

sind nur ihre Sinus und Cosinus und zwar auf 7 Stellen gekürzt aufgenommen. Auch sind zahlreiche Kontrollrechnungen zur Sicherstellung der Zahlen vorgenommen worden. Neben den Winkeln in Sexagesimalteilung wurden auch die Winkelwerte in zentesimaler Teilung beigeschrieben, indem der Quadrant in 100 *gr*, 1 *gr* in 100 *c*, 1 *c* in 100 *cc* zerlegt ist, denen noch zwei Dezimalstellen beigegeben sind. Dieses Werk soll auch noch auf alle sechs trigonometrischen Funktionen erweitert werden. Daß neben den vielen und vorzüglichen Logarithmentafeln eine so ausgedehnte Tafel der natürlichen Funktionen wieder Boden finden kann, hat seinen nächsten Grund in der immer weiter um sich greifenden Benützung der Rechenmaschinen, einen entfernteren darin, daß namentlich in der Geodäsie die direkte Rechnung mit den Funktionswerten einen gewissen Vorzug vor der logarithmischen genießt.

Auch Regiomontans längst verschollener Gedanke, Tafeln für die Gleichung $\sin x \sin y = \sin z$ (siehe I. Tl. S. 123) zu berechnen, war 1849 wieder von Adolf Heegemann aufgefrischt worden, jedoch ohne daß dieser von Regiomontan oder Magini (I. Tl. S. 232) etwas wußte. Heegemann berechnete eine Tafel[1]), in welcher die Argumente x und y der obigen Gleichung von 0^0 bis 90^0 in Intervallen von $30'$ fortschreiten, während die Arealzahlen z in Dezimalteilen angegeben sind, indem der Grad in 600 Teile geteilt ist. Ferner stellte er eine ebensolche Tafel für die Gleichung $\sin x \operatorname{tg} y = \operatorname{tg} z$ her und wandte beide Tabellen namentlich auf Aufgaben aus der nautischen Astronomie an, wo es von besonderer Wichtigkeit ist, die Winkel direkt ohne viel Rechnung zu erhalten. Der Autor gibt an, seine Tafeln sogar auf Sekunden berechnet zu haben, konnte sie aber wegen des zu großen Umfanges nicht in den Druck bringen. Außerdem sollen Inmans Nautical Tables und Rapers Practice of Navigation gute Tafeln zur Berechnung von $\sin \frac{A}{2}$ aus $\sin^2 \frac{A}{2} = \frac{1}{2} \operatorname{sinvers} A = \frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b \sin c}$, einem Wert, der in der Nautik vielfach gebraucht wird, enthalten.

Indem wir von der Entwicklungsgeschichte der Additions- und Subtraktionslogarithmen absehen, die nicht direkt in unser Gebiet gehören, erwähnen wir noch eine siebenstellige Tafel, die Gudermann in seiner Theorie der potential- oder zyklisch-hyperbolischen Funktionen an Lambert (S. 134) anschließend 1833 gab.[2]) Sie umfaßt

1) Mémoires de la société nationale des sc. de l'agricult. et des arts de Lille 1849. Angezeigt in Nouv. Ann. X, 1851, 350. — 2) Theorie der potential- oder zyklisch-hyperbolischen Funktionen, Berlin 1833, zuerst im Journal für Mathematik VI—IX, 1830—32 erschienen.

auf 100 Seiten die Werte von log nat. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\tau}{2}\right)$ für jede Minute des Quadranten. Eine ähnliche hatte auch Legendre in seinem Traité des fonctions elliptiques 1826, II, für jeden halben Sexagesimalgrad des Quadranten mitgeteilt und die Zahlen auf 12 Dezimalstellen angegeben. An Gudermanns Tafel schließen sich die Tafeln der hyperbolischen Funktionen von Gronau, 1862[1]) und von Angelo Forti[2]), 1863 (neueste Aufl. 1893) an, in welch letzteren zum erstenmal außerhalb Deutschland der Versuch gemacht wurde, den Gebrauch der Hyperbelfunktionen in die Praxis einzuführen. In Frankreich hat Hoüel in seine Tabellenwerke zuerst 1866 hyperbolische Logarithmen aufgenommen[3]), dabei ist der transzendente Winkel zentesimal geteilt, ihm folgte 1872 Vassal[4]) nach. Von deutschen Tafeln sind noch die Tafeln der Hyberbel- und Kreisfunktionen von W. Ligowski, 1873 und 1889 zu nennen.[5])

Eine vollständige Neuberechnung von Tafeln für die Kreisfunktionen und ihre Logarithmen war im 19. Jahrhundert kein eigentliches Bedürfnis mehr, wohl aber war es, da die meisten zugänglichen Tabellen höchstens siebenstellige Zahlen enthielten, sehr wünschenswert, Methoden zu besitzen, um sich ohne übermäßigen Rechenaufwand eine große Stellenzahl zu verschaffen. Mit dieser Aufgabe beschäftigten sich daher verschiedene Mathematiker: J. Herr-

---

1) Lambert und Gudermann führten die Hyperbelfunktionen auf die Kreisfunktionen zurück, indem sie von der Eigenschaft Gebrauch machten, daß die ersteren dieselben Werte, aber in anderer Reihenfolge wie die Kreisfunktionen des „transzendenten" Winkels τ haben, der an das Argument ω der hyperbolischen Funktionen durch die Gleichung gebunden ist: $\omega = \log \text{nat.} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\tau}{2}\right)$; Gronau aber führte statt des natürlichen den Briggsschen Logarithmus ein. — 2) Annali delle Università Toscane VI; 1870 erschien eine zweite Auflage selbständig mit siebenstelligen Logarithmen, die Auflagen von 1882 und 1893 endlich enthalten sechsstellige. Die Einrichtung ist folgende: Die linke von zwei aufliegenden Seiten der Tafel enthält die gewöhnlichen Logarithmen der trigonometrischen Funktionen, die rechte Seite zu jedem Winkel φ von 0° bis 45° fortlaufend in der ersten Spalte den doppelten Hyperbelsektor ω entsprechend der Beziehung $\varphi = \operatorname{arctg} e^{2\omega} - \frac{\pi}{4}$, in der zweiten Spalte stehen die Werte von $\log \omega$, in der dritten und vierten log sin hy ω, log cos hy ω und in der letzten der transzendente Winkel τ. — 3) Recueil de Formules et de Tables numériques, Paris 1866. — 4) Nouvelles Tables donnant avec cinq décimales vulgaires et hyperboliques pour tous les degrés du quart de cercle de minute en minute, Paris 1872. — 5) Sammlung von fünfstelligen logarithmischen, trigonometrischen, nautischen und astronomischen Tafeln, Kiel 1873 und Tafeln der Hyperbel- und Kreisfunktionen mit einem Anhang, enthaltend die Theorie der Hyperbelfunktionen, Berlin 1889. Er gab auch 1890 Tafeln der trigonometrischen Funktionen für ein nach Teilen des Halbmessers fortschreitendes Argument.

mann, der eine solche Methode gab, erwähnten wir schon (S. 230); etwas früher, 1841, entwickelte Hill, Professor in Lund, folgendes Verfahren. Er verschaffte sich die sieben Werte von $\cos(r\varphi)$ und $\sin(r\varphi)$ auf 15 Dezimalen, die sich für $\varphi = 11^0\,15'$ und $r = 1, 2, \ldots 7$ ergeben, und stellte sie in eine kleine Tabelle zusammen. Dann gab die Additionsformel $\sin(r\varphi \pm \psi) = \sin(r\varphi)\cos\psi \pm \cos(r\varphi)\sin\psi$, wenn man $\sin\psi$ aus seiner von uns schon früher (S. 213) angeführten Formel $\sin\psi = x - \frac{x^2}{6}\left(1 - \frac{x^2}{420}\right)^{21}$, $x = \frac{\pi\psi}{180^0}$, die für $\psi < \frac{1}{2}\varphi$ auf 15 Dezimalen genaue Werte liefert, entnahm, die Sinus aller Winkel des Quadranten ohne viele Mühe.

Um dieselbe Zeit beschäftigten sich auch die französischen Mathematiker A. T. E. Vincent, Finck, Lionnet und Bach damit, auf ganz elementarem Wege Formeln zu dem gleichen Zwecke aufzustellen.[1]) Dazu verschafften sie sich die Anfangsglieder der Reihen für $\sin a$ und $\cos a$ elementar und bedienten sich zur weiteren Rechnung der Formeln $\sin(m+1)a = 2\cos a \sin ma - \sin(m-1)a$, $\cos(m+1)a = 2\cos a\cos ma - \cos(m-1)a$, von denen wir die erste schon bei Rhäticus (Tl. I, 213), die zweite bei Vieta (Tl. I, 166) fanden. Fink bezeichnet sie unrichtigerweise als Simpsonsche Formeln. Die successive Rechnung, die Bach angibt, ist folgende. Kennt man den Näherungswert e von $\sin 10''$ auf i Dezimalstellen, und ist $e + \varepsilon$ sein exakter Wert, also ε der Fehler, so liefert die erste der obigen Formeln (für $m + 1 = n$) $\sin(n\,10'') = (2-k)\sin(n-1)\,10'' - \sin(n-2)\,10''$, wo $k = 2 - 2\cos 10'' = 0{,}000\,000\,00\,2350$ ist, also für $n = 2$: $\sin 20'' = (2-k)(e+\varepsilon) = 2e - ke + \varepsilon(2-k)$, wo k gegen 2 in $(2-k)$ vernachlässigt werden kann. Sei $2e - ke = e_1$, $2\varepsilon = \varepsilon_1 < \frac{1}{10^i} + 2\varepsilon$, dann folgt weiter

$\sin 30'' = (2e_1 - e - ke_1) + 2\varepsilon_1 - \varepsilon = e_2 + \varepsilon_2$, $\varepsilon_2 < \frac{1}{10^i} + 2\varepsilon_1 - \varepsilon < \frac{3}{10^i} + 3\varepsilon$

u. s. f. bis $\sin n\,10''$, wo der begangene Fehler $\varepsilon_{n-1} < \frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{1}{10^i} + n\varepsilon$ wird. Für $n = 16\,200$ erhält man $\sin 45^0$, mit einem Fehler

$$< \frac{2\cdot 10^8}{10^i} + \frac{4\cdot 10^4}{10^{14}} \text{ oder für } i = 18, \ < \frac{6}{10^{10}} < \frac{1}{10^9},$$

also auf 9 Stellen richtig.

Von einem umfassenderen Standpunkte ging Laguerre 1880 aus[2]), indem er den allgemeinen Satz bewies: „Bezeichnet $f(x) = 0$

---

1) Nouv. Ann. I, 1842, 272; ebenda 353; II, 1843, 216; III, 1844, 11; XII, 1853, 108. — 2) Comptes rendus de l'Académie des Sc. de Paris XC, 1880, 304.

eine Gleichung, deren sämtliche Wurzeln reell sind, und α eine beliebige Größe, so liegen die beiden Werte von x, welche durch

$$\frac{1}{x-\alpha} = \frac{-f'(\alpha) \pm \sqrt{(n-1)^2 f'^2(\alpha) - n(n-1) f(\alpha) f''(\alpha)}}{n f(\alpha)}$$

bestimmt sind, bezüglich zwischen α und den beiden dem Werte α zunächstliegenden Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$". Indem er nun die Gleichung $0 = f(x) = 1 - \cos\alpha - n^2(1-x) + \frac{n^2(n^2-1)}{1\cdot 2\cdot 3}(1-x)^2 - \cdots$ nimmt, deren größte Wurzel $\cos\frac{\alpha}{n}$ ist, und von dem Näherungswert $+1$ ausgeht, erhält er $f(1) = 1 - \cos\alpha$, $f'(1) = n^2$, $f''(1) = \frac{n^2(n^2-1)}{3}$, woraus sich $\cos\frac{\alpha}{n} = 1 - \frac{1-\cos\alpha}{n + (n-1)\sqrt{n^2 - \frac{n(n+1)}{3}(1-\cos\alpha)}}$ ergibt. Für $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{1}{n}$ folgt dann die Näherungsformel:

$$\cos\frac{\pi x}{2} = 1 - \frac{x^2}{x + (1-x)\sqrt{\frac{2-x}{3}}}.$$

Diese gibt eine ganz gute Annäherung für alle Werte von x zwischen 0 und 1, wenn sie auch nicht Hills Methode ersetzen kann. Auch von anderer Seite, so von F. Giudice[1]) 1888, von E. Lackemacher[2]) 1890 und von E. Lampe[3]) 1897 wurden noch Näherungsformeln mitgeteilt. Prytz[4]) aber hat eine Methode gegeben, welche eine Berechnung der Logarithmen der Kreisfunktionen auf 15 Stellen nur durch Addition und Subtraktion gestatten. Diese besteht in folgendem. Aus $(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1)(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2)\ldots$ folgt $= \cos\Sigma\alpha + i\sin\Sigma\alpha$, wo $\Sigma\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots$ bedeutet, und dies ist $= \cos\alpha_1\cos\alpha_2\cdots(1 + iT_1 - T_2 - iT_3 + T_4 + iT_5 - \cdots)$, wenn T_1, $T_2\ldots$ die Summen der Produkte der Größen $\operatorname{tg}\alpha_1$, $\operatorname{tg}\alpha_2$, $\operatorname{tg}\alpha_3\ldots$ zu je einem, je zweien, je dreien u. s. w. bedeuten. Daraus folgt $\cos\Sigma\alpha = \cos\alpha_1\cos\alpha_2\cdots(1 - T_2 + T_4 - \cdots)$, $\sin\Sigma\alpha = \cos\alpha_1\cos\alpha_2\cdots(T_1 - T_3 + T_5 - \cdots)$, und man kann $\log\cos\Sigma\alpha$ und $\log\sin\Sigma\alpha$ bestimmen, sobald man T_1, $T_2\cdots$ gefunden hat. Hierzu aber hat Prytz eine sehr praktisch eingerichtete, nur eine Seite umfassende Tafel gegeben, die zu allen log cotg von -1 bis 7,1 mit dem Intervalle 0,1 15stellig die log cos und die zugehörigen Winkel bis auf 10 Dezimalen der Sekunde alter Teilung liefert.[5])

1) Periodico di Matem. Diretto da Besso, Roma III, 1—7. — 2) Archiv für Mathem. 2. Serie IX, 215. — 3) Mathesis, 2. Serie VII, 129—134, 153—156, 183—188. — 4) Tables d'Antilogarithmes. (Erscheinungsjahr nicht angegeben, wahrscheinlich 1886.) — 5) Vgl. J. Lüroth, Vorlesungen über numerisches

An Methoden zur Berechnung der Logarithmentafeln der Kreisfunktionen hatte das 19. Jahrhundert wenig Neues hinzuzufügen; man bediente sich entweder, wie Sang, der älteren Methode, indem man die in größeren Intervallen aufeinanderfolgenden Funktionswerte durch Lösung der Teilungsgleichungen eruierte, die Logarithmen derselben bestimmte und dann die Zwischenwerte passend interpolierte[1]) oder man berechnete die ersteren wie Euler mittelst der Reihen, oder endlich man suchte sich wie Franceur[2]) (1858) direkt Reihen für log sin x und log cos x, indem man die Cosinus- und Sinusreihen in die logarithmische Reihe einführte. Übrigens hatte ähnliche Reihen auch schon Euler hergestellt[3]) und die Koeffizienten auf eine hohe Stellenzahl berechnet.

Dagegen hat man den Fehlern, welche aus der Benützung der Funktionen- und Logarithmentafeln hervorgehen, seitdem Gauß in seiner Theoria motus (Art. 30 und 31) auf die Notwendigkeit ihrer Untersuchung aufmerksam machte, eine eingehende Berücksichtigung angedeihen lassen. Da jedoch diese Betrachtungen sich nur auf einen ganz speziellen Teil der Rechnung mit genäherten Größen beziehen, so gehört eine Besprechung der einschlägigen Literatur mehr einer Geschichte des numerischen Rechnens als einer Geschichte der Trigonometrie an, und wir bemerken daher nur, daß Karl Bremiker[4]) (1804—1877) der erste war, der in der Einleitung zu seinen 1882 erschienenen Tafeln eine Theorie der Logarithmentafeln gab, daß sich dann P. Escher[5]) 1854 und Lindmann[6]) 1855 ebenfalls damit beschäftigten, daß H. Stadthagen[7]) 1888 Bremikers Theorie unter Verwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung[8]) ausbaute und daß in allerneuester Zeit (1900) Lüroth in dem schon angeführten Werke auch dieser Richtung eine eingehende Beachtung schenkte.[9])

Rechnen, Leipzig 1900, § 57, dem die obigen Mitteilungen entnommen sind, und wo man noch Genaueres über die Benützung der Tafeln von Prytz findet.

1) Ein solches Interpolationsverfahren gibt Bidell Airy in dem Artikel „Tables" der Encyclopaedia metropolitona, London 1845, 683 ff. Vgl. auch Legendre in Connaissance de temps pour 1819, 302. — 2) Cours complet de Mathém. Art. 588, auch Elphistone im Quarterly Journal II, 1858, 222—225. — 3) Introductio in Analysin infinitorum § 194 und 195. — 4) Nova tabula Logarithmorum VI decimalium, Berolinae 1852. — 5) Archiv für Math. XXIII, 264—284. — 6) Ebenda XXV, 284—289. — 7) Beiträge zur Untersuchung des Genauigkeitsgrades astronomischer Rechnungen. Dissert. Berlin 1888. — 8) Übrigens hat auch Bremiker schon die Wahrscheinlichkeitsrechnung bei seiner Theorie der Fehlerbestimmung benützt. — 9) Vgl. auch noch: Besso, Periodico di Matem. Roma I, 1886, 122—126 und Riccardi, ebenda III, 97—103, 137—144. Auch im Nachlasse von Gauß, Werke VIII, 129 finden sich einige Formeln zur Interpolation von Cotangenten und Cosekanten kleiner Winkel.

§ 7. Polygonometrie und Polyedrometrie.

Wir bemerkten schon im zweiten Paragraphen des vorhergehenden Kapitels, daß die Polygonometrie — und das Gleiche gilt noch mehr von der Polyedrometrie — streng genommen nicht in den Rahmen unserer Darstellung gehört. Wir werden uns daher bei Besprechung der Fortschritte, die beide Gebiete im 19. Jahrhundert machten, wieder wie früher möglichst kurz fassen.

Wie wir sahen, haben L'Huilier und Carnot den Hauptsatz der Polyedrometrie aufgestellt und den entsprechenden Satz auch für schiefe Polygone formuliert. Außerdem gewann letzterer aus dem Haupttheorem noch folgenden sehr allgemeinen Lehrsatz[1]): „In jedem ebenen oder Raumpolygon und in jedem Polyeder ist die Summe der Quadrate der Seiten oder Seitenflächen gleich der doppelten Summe der Produkte dieser Seiten zu je zweien, jedes Produkt multipliziert mit dem Cosinus des Winkels, den sie einschließen." Für das Tetraeder hatte diese Wahrheit schon Lagrange 1773 ausgesprochen. Ferner hat Carnot 1806 in einer eigenen Abhandlung[2]) noch Beziehungen zwischen den Abständen von vier und fünf Punkten in Ebene und Raum, wenn auch in wenig übersichtlicher Form abgeleitet. 1824 gab Jakob Sturm, dessen Name hauptsächlich durch das nach ihm benannte algebraische Theorem bekannt wurde, in seinen „Recherches analytiques"[3]), die wir schon früher anführten (S. 179), eine elegante Entwicklung der Hauptsätze der Polygonometrie und Polyedrometrie vom Standpunkte der analytischen Geometrie, und L'Huilier fügte 1828 seinen vielen Entdeckungen auf diesem Gebiete noch folgenden allgemeinen Satz bei[4]): „Hat man ein Polyeder, dessen eine Seitenfläche man als Basis betrachtet, so ist das Produkt einer der andern Flächen in den Sinus ihrer Neigung zur Basis gleich der Summe der Produkte aus jeder andern Seite in den Sinus ihres Neigungswinkels zur selben Basis und in den Cosinus des Winkels, welchen der Schnitt dieser Seitenfläche in der Basis mit einer bestimmten Seite der letzteren macht."

Von sehr allgemeinem Gesichtspunkt aus nahm Anton Müller (1799—1860) 1836 die Lehre von den schiefen Polygonen in Angriff[5]), indem er die allgemeinsten Gleichungen zwischen den n Winkeln,

1) Géométrie de position, 1803, Theorem 21 und 23, 308. — 2) Mémoire sur la rélation qui existe entre les distances resp. de cinq points etc., Paris 1806, 4°. — 3) Annales de Mathém. XV, 1824/25, 309 ff. — 4) Bibliothèque universelle de Genève, 1828, 249. — 5) Die allgemeinsten Sätze der sphärischen Polygonometrie und die allgemeinsten Gleichungen der gauchen Polygone, Heidelberg 1836, 4°.

die aus zwei aufeinanderfolgenden Polygonsseiten gebildet werden, und jenen n Neigungswinkeln, welche die Ebenen durch je drei aufeinanderfolgende Ecken einschließen, aufstellte. Solcher Relationen gibt es sieben, wozu noch vier Beziehungen zwischen den Seiten und Polygonswinkeln treten. Jedoch machte der von ihm geschaffene ungewohnte Algorithmus seine an sich nützliche Schrift so wenig zugänglich, daß die spätere Literatur sie fast vollständig ignorierte.

Mehr Beachtung fanden die wichtigen und sehr allgemeinen Sätze, die Karl Georg Christian von Staudt (1798—1867) 1842 mitteilte.[1]) Sie beziehen sich auf die Inhalte von Polygonen und Polyedern. Wir führen den interessantesten derselben an, indem wir uns einer von Baltzer benützten Bezeichnungsweise bedienen, die den Vorzug größerer Übersichtlichkeit vor der Staudtschen voraus hat. „Sind a, b die Inhalte zweier ebener Polygone $A_1 A_2 \ldots A_m$, $B_1 B_2 \ldots B_n$, welche in zwei verschiedenen unter dem Winkel φ gegeneinander geneigten Ebenen liegen, bezeichnen p, q die Nummern $1, 2 \ldots m$ und r, s die Nummern $1, 2 \ldots n$, bilden die Geraden AA_p und BB_r nach willkürlicher Festsetzung ihrer positiven Richtungen einen Winkel, dessen Cosinus $\cos_{pr}$ ist, und wird $AA_p \cdot BB_r \cos_{pr} = c_{pr}$ gesetzt, so ist $4\,ab \cos\varphi = \Sigma(c_{pr}c_{qs} - c_{ps}c_{qr})$, eine Summe, welche $(m-1)(n-1)$ Glieder annimmt, wenn man für p, q je zwei folgende Nummern der Reihe $1, 2 \ldots m$ und zugleich für r, s je zwei folgende Nummern der Reihe $1, 2 \ldots n$ setzt.“ Dieser Satz, den Staudt auch auf zwei Polyeder ausgedehnt hat, ist besonders deswegen bemerkenswert, weil die Größen c_{pr} durch die Quadrate von solchen Strecken sich rational ausdrücken lassen, welche die Spitzen des einen Polygons mit denen des andern verbinden[2]); also ist, was auch schon Staudt bemerkte, $16\,ab \cos\varphi$ eine ganze Funktion der Quadrate dieser Strecken.

In derselben Abhandlung führte Staudt auch den Begriff des Eckensinus ein, den wir schon S. 195 kennen lernten, und der in der Folge für die Tetraedrometrie von Wichtigkeit wurde.

Viel speziellerer Natur, aber doch von großer Vollständigkeit sind die in zwei umfangreichen Abhandlungen von 1842 und 1843 niedergelegten Arbeiten C. A. Bretschneiders über die trigonometrischen Relationen des einfachen und des vollständigen geradlinigen Vierecks.[3]) Sie schließen sich an die von Carnot eingeschlagene Richtung an.

---

1) Journal für Mathem. XXIV, 1842, 252—356. — 2) A. a. O. 253 und 256. — Baltzer: Elemente der Mathematik II, 6. Aufl. 1883, 345—347. — 3) Archiv für Mathem. II, 1842, 225—261 und III, 1843, 84—93. (Die erste lernten wir schon S. 198 kennen.)

Eine bedeutende Verwendung fand und findet die ebene Polygonometrie noch in der Feldmeßkunst, indem man ein rechtwinkliges Koordinatensystem zugrunde legt und die Koordinaten der Eckpunkte eines offenen oder geschlossenen Polygonalzuges in Rechnung zieht. Dabei rechneten die Geometer, wie Grunert, Münchow[1]), Dienger[2]), Proß[3]), Mack[4]) und andere, ja sogar noch Spitz[5]), mit den Innenwinkeln des Polygons im Anschluß an L'Huilier, wenn sie auch die Drehungswinkel (Richtungswinkel), d. h. die Winkel, um welche die Polygonsseiten gegen die positive Richtung der x-Achse in demselben Sinne gedreht erscheinen, benützten, und erst in den fünfziger Jahren bürgerte sich allmählich das Verfahren ein, von dem Zusammenhang dieser letzteren Winkel mit den Innenwinkeln des Polygons ganz Abstand zu nehmen und nur mehr die ersteren zu benützen, was für die Berechnung manche Vorteile bietet.[6]) Doch überlassen wir Detailuntersuchungen über dieses Gebiet einer Geschichte der Geodäsie und wenden wir uns zu A. F. Möbius, der durch seine Einführung des „Kantengesetzes", das er schon in seiner Statik 1837 andeutete[7]) und 1865 in einer Abhandlung[8]) „Über die Bestimmung des Inhaltes eines Polyeders" näher ausführte, erst die präzise Fassung des Hauptsatzes der Polyedrometrie ermöglichte. Dieses lautet: „Den Perimetern der ein Polyeder umgrenzenden Flächen können solche Sinne beigelegt werden, daß für jede Kante des Polyeders die zwei Richtungen, welche derselben, als der gemeinschaftlichen Kante zweier Polyederflächen, infolge der Sinne dieser zwei Flächen zukommen, einander entgegengesetzt sind."[9]) Mit Hilfe dieses Gesetzes hat dann Baltzer den Hauptsatz folgendermaßen formuliert: „Wenn die Perimeter der n Flächen eines Polyeders dem Gesetze der Kanten genügen und wenn von den n Ebenen, auf denen die Flächen des Polyeders liegen, die positiven Sinne willkürlich festgesetzt worden sind, so

---

1) Ebene und sphärische Trigonometrie, Bonn 1826. — 2) Die ebene Polygonometrie, Stuttgart 1854. — 3) Lehrbuch der ebenen Trigonometrie und Polygonometrie, Stuttgart 1840. — 4) Goniometrie und Trigonometrie, Stuttgart 1860. — 5) Lehrbuch der ebenen Polygonometrie, Leipzig und Heidelberg 1881. — 6) Vgl. z. B. Hammer, Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie, 2. Aufl., Stuttgart 1897, § 40 und 41. — 7) Statik, 1837, Werke III, 78. — 8) Sitzungsberichte der Leipziger k. Gesellschaft d. Wissensch., math.-phys. Klasse XVII, Werke II, 477 — 9) Möbius erwähnt Eingangs der angeführten Abhandlung einen Aufsatz von A. L. F. Meister in den Novi Comment. soc. reg. scient. Gottingensis I, 1769/70, der die Bestimmung des Inhaltes eines ebenen Vielecks in größtmöglicher Allgemeinheit zum Ziele hat. In der Tat scheint uns der Einfluß dieser Abhandlung auf Möbius beachtenswert zu sein, indem hier der in allen Arbeiten von Möbius eingeführte und konsequent festgehaltene Zählungssinn bereits verwendet ist.

haben die Flächen des Polyeders unzweideutig bestimmte Werte $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$. Nimmt man eine beliebige Ebene hinzu, deren positiver Sinn ebenfalls willkürlich festgesetzt wird, und bezeichnet man durch $\cos_{pi}$ den Cosinus des Winkels, den mit der beliebigen Ebene die Ebene bildet, auf welcher die Fläche vom Werte α_i liegt, so ist $\alpha_1 \cos_{p1} + \alpha_2 \cos_{p2} + \alpha_3 \cos_{p3} + \cdots + \alpha_n \cos_{pn} = 0$, d. h. die Summe der Normalprojektionen der Flächen des Polyeders auf die beliebige Ebene verschwindet."

Hieran anschließend beweist Baltzer den wichtigen Satz, daß es zu jedem Polyeder ein zugehöriges Polygon gibt, dessen Seiten und Winkel den Flächen und Flächenwinkeln des Polyeders gleich sind, so daß jede polygonometrische Gleichung zwischen den Seiten und Winkeln des Polygons zugleich eine polyedrometrische zwischen den Flächen und Flächenwinkeln eines Polyeders ist. Auch liefert ihm der erwähnte Hauptsatz unter anderm mit Leichtigkeit die Relationen zwischen den Cosinus der Winkel von n Geraden oder Ebenen, auf denen die Seiten oder Flächen eines Polygons oder Polyeders liegen — Beziehungen, die für $n = 4$ bereits Carnot abgeleitet hatte.

Mit diesen präzisen Formulierungen waren die allgemeinen Untersuchungen über Polyeder, wenigstens soweit sie uns interessieren, in gewissem Sinne abgeschlossen, und auch der Polygonometrie konnte nicht mehr viel Neues hinzugefügt werden. Wir nennen nur noch die Umgestaltung der L'Huilierschen Inhaltsformel für Vielecke, die 1871 Becker[1]) gab, sowie Hoppes' Abzählung der Relationen, welche zwischen den durch die Seiten und Diagonalen gebildeten Winkeln bestehen[2]), und fünf für ebene und windschiefe Polygone giltige Sätze, die 1891 Bernardi mitteilte, welche aber auf eine Verallgemeinerung des Satzes von Ceva hinauskommen und somit mehr der Geometrie als der Trigonometrie angehören.

Die bisher angeführten Theoreme waren allgemeiner Natur und bezogen sich zum Teil auf Polyeder von n Seiten, sie umfassen also von selbst die Theorie des Tetraeders, als des einfachsten Polyeders, und doch müssen wir auf die Geschichte dieses Körpers noch mit ein paar Worten zurückkommen, da er, gerade weil er der einfachste ist, die vielseitigste Behandlung gefunden hat. Uns interessieren jedoch nicht sowohl die einzelnen Sätze[3]) über das Volumen, die umgeschriebenen und eingeschriebenen Kugeln u. s. w., mit deren

1) Zeitschr. für Mathem. und Physik XVI, 534. — 2) Archiv für Mathem. LXI, 1877, 439. — 3) Die reiche Literatur hierüber müssen wir als zu den Anwendungen der Trigonometrie zählend ausschließen.

Aufstellung sich schon Euler, Lagrange, De Gua, Carnot, Monge, Hachette und nach diesen unzählige andere beschäftigt haben, als vielmehr die Versuche, auf dem Tetraeder als Grundlage ebenso eine Raumtrigonometrie aufzubauen, wie die ebene Trigonometrie auf dem Dreieck basiert.

Diese den Namen Tetragonometrie führende Lehre ist im wesentlichen von Gustav Junghann 1862/63 geschaffen worden[1]) und baut sich auf dem Staudtschen Begriff des Eckensinus auf. Junghann hat ohne Zweifel das von uns schon erwähnte Werk A. Müllers über Polyedrometrie nicht gekannt, sonst könnte man glauben, er habe daraus den Gedanken geschöpft, aus dem dort für beliebige n-Kante gegebenen Algorithmus den weit einfacheren für das Dreikant abzuleiten.

Wir sahen schon S. 194, daß Gauß bereits die Bedeutung der Ausdrücke erkannte, die Junghann hier in der Bezeichnung P-Sinus und Π-Sinus zur Grundlage seiner Tetragonometrie macht. Dieselben sind definiert durch die Gleichungen

$$P = \tfrac{1}{2} \sin b \sin c \sin \alpha = \tfrac{1}{2} \sin c \sin a \sin \beta = \tfrac{1}{2} \sin a \sin b \sin \gamma$$
$$= \sqrt{\sin s \sin (s-a) \sin (s-b) \sin (s-c)}$$

und Π durch die Polarformeln hierzu. Somit stimmt P mit dem halben Eckensinus von Staudt überein und $\frac{P}{\pi}$ ist der Bretschneidersche Dreiecksmodul (S. 183). Im ersten Teile seines Werkes schuf Junghann eine vollständige Goniometrie dieser Funktionen P und Π, indem er die Formeln entwickelte, welche zwischen den P- und Π-Funktionen mehrerer Ecken mit gemeinschaftlichem Scheitel stattfinden. Gehen z. B. von einem Punkte 0 im Raume die fünf Strahlen r_0, r_1, r_2, r_3, r_4 aus, von denen keine drei einer Ebene angehören, und sind die Schnittpunkte einer zu OA senkrechten Ebene mit denselben A, B, C, D, E, so ist $OBCD + OBDE + OBEC + OEDC = 0$, wenn man, was Junghann allerdings nicht tut[2]), das Vorzeichen jedes Tetraedervolumens nach Möbius[3]) bestimmt. Führt man in

1) Die ersten Anfänge hierzu finden sich schon 1848 in den Studien über das sphärische Dreieck im Programm des Luckauer Gymnasiums, dann kamen 1860 Beiträge zur Polyedrometrie im Archiv für Mathem. XXXIV, 369, endlich erschien das zweiteilige Werk „Tetraedrometrie" 1862/63 in Gotha, 8°, an das sich noch ein Artikel im Archiv für Mathem. XL, 1863, 447—459 anschloß, in dem er (448) sagt, er glaube dargetan zu haben, daß die Tetragonometrie für die Stereometrie eine ebenso wesentliche und notwendige Ergänzung ist, wie die Trigonometrie für die Planimetrie. — 2) Darauf hat Gretschel in einer Anzeige von Junghanns Schrift (Zeitschr. für Mathem. und Phys. X, 1865, liter.-hist. Teil 52) aufmerksam gemacht. — 3) Der Barycentrische Calcul, Leipzig 1827, 22.

diese Gleichung die P ein und beachtet, daß $OB = OA \sec(r_0 r_1)$, $OC = OA \sec(r_0 r_2)$ u. s. w. ist, so kommt:

$$P(r_1 r_2 r_3) \cos(r_0 r_4) + P(r_1 r_3 r_4) \cos(r_0 r_2) + P(r_1 r_4 r_2) \cos(r_0 r_3) + P(r_4 r_3 r_2) \cos(r_0 r_1) = 0.$$

Die entsprechende goniometrische Gleichung in der Ebene lautet:

$$\sin(r_1 r_2) \cos(r_0 r_3) + \sin(r_2 r_3) \cos(r_0 r_1) + \sin(r_3 r_1) \cos(r_0 r_2) = 0.$$

Dieselbe Gleichung kann man für die Π-Funktionen ansetzen, indem man sich fünf Ebenen e_ν denkt, die auf den fünf Strahlen r_ν senkrecht stehen. Die Nichtanwendung des Vorzeichenprinzipes macht natürlich die Darstellung Junghanns schwerfälliger, indem er einzelne Fälle zu unterscheiden gezwungen ist. Der zweite Teil des Werkes ist Anwendungen gewidmet, um den Vorteil der neuen Funktionen für die Behandlung verschiedener Probleme ins Licht zu setzen, und enthält namentlich im 10. Kapitel eine interessante Untersuchung des Carnotschen Mémoire sur les rélations qui existent entre les distances de cinq points etc., das wir schon öfter erwähnten. Der Verfasser glaubte gerade hier durch Einführung seiner Funktionen besondere Vereinfachungen erzielt zu haben, doch beruhen dieselben, wie auch sonst fast durchweg, eigentlich nur in der Form der Gleichungen, und in der Tat erwiesen sich die weitgehenden Hoffnungen, welche Junghann auf die Einführung dieser Funktionen setzte, die er namentlich für die Stereometrie als unentbehrlich erachtete, für trügerisch: Die spätere Literatur ist nur wenig mehr auf seinen Versuch zurückgekommen[1]), obwohl er noch im gleichen Jahre (1863) eine weitere Abhandlung darüber veröffentlichte.[2])

Was die Polygonometrie auf der Kugel anlangt, so wollen wir ebenfalls nur allgemeinere Untersuchungen über dieselbe ins Auge fassen, während wir die zahllosen Spezialabhandlungen über die Eigenschaften des sphärischen Vierecks als den Anwendungen der Trigonometrie angehörig bei Seite lassen. Abgesehen von dem schon S. 209—210 erwähnten Aufsatze Quetelets, in welchem er Oberflächenberechnungen von sphärischen Polygonen anstellte, die aus größten Kreisen und Kleinkreisbogen gebildet sind, begegnen wir zuerst 1827 jener Abhandlung von J. L. Raabe, die uns schon einmal (S. 179) beschäftigte, als wir die Ableitung der sphärischen Dreiecksformeln aus der Koordi-

1) Im Archiv für Mathem. erschienen noch einige Artikel von Dostor (LVI, 1874, 247—249, LVIII, 1878, 1) und von Hellwig (ebenda 180—184), welche sich ebenfalls des Eckensinus bedienten. Letzterer schlug vor, P durch Sin und Π durch Cos zu ersetzen, und zeigte an einigen Beispielen, wie dann gewisse tetraedrometrische Formeln sehr ähnlich den entsprechenden trigonometrischen werden. — 2) Archiv für Mathem. XL, 447 ff.

natentransformation besprachen. Die letztere diente ihm auch dazu, um zu zeigen, wie man allgemeine Formeln zwischen den Seiten und Winkeln von Kugelpolygonen, die aus größten Kreisen gebildet sind, erhalten könne. Er dachte sich nämlich den Mittelpunkt der Kugel als Anfangspunkt eines rechtwinkligen Koordinatensystems und brachte dies durch Drehung um den Anfangspunkt in eine zweite, dritte u. s. w. Lage, bis es nach $n+1$ maliger Drehung wieder mit dem ursprünglichen zusammenfiel. Sowohl der Schnittpunkt der x-Achse mit der Kugel, als auch jener der z-Achse beschreiben dann bei dieser Drehung Polygone von $n+1$ Seiten. Die Seiten des ersten $a_0, a_1, \ldots a_n$ werden durch die Ebenen der Winkel ausgeschnitten, welche die x-Achsen der aufeinanderfolgenden Systeme miteinander bilden, und die Außenwinkel $b_0, b_1, \ldots b_n$ dieses Polygons sind die Neigungswinkel der xy-Ebenen gegeneinander. Sind die Koordinaten der ersten Ecke $(a_0 a_1)$ $x_0 = r \cos a_0$, $y_0 = r \sin a_0 \cos b_0$, $z_0 = r \sin a_0 \sin b_0$, so liefern einerseits die bekannten Transformationsformeln successive angewendet, die Koordinaten des Durchschnittspunktes von a_{n-1} mit a_n in Funktion der Seiten a_ν und der Winkel b_ν ausgedrückt, andererseits sind aber die Koordinaten dieser Ecke $x_{n-1} = r \cos a_n$, $y_{n-1} = r \sin a_n$, $z_{n-1} = 0$, und die Gleichsetzung dieser Werte mit den durch Transformation gewonnenen liefert drei Hauptformeln, welche zwischen den Winkeln und Seiten des Polygons bestehen. Raabe stellte diese Relationen für das sphärische Dreieck ($n=2$) und für das sphärische Viereck wirklich auf, entwickelte sie jedoch nicht für einen beliebigen Wert von n, wahrscheinlich, weil seine Methode zu komplizierte Formeln gab, deren Bildungsgesetz nicht übersehen werden konnte. Dies unternahm 1836 der schon wiederholt erwähnte Anton Müller in seinem Werke „Die allgemeinen Gesetze der sphärischen Polygonometrie und die allgemeinen Gleichungen der gauchen Polygone", Heidelberg 1836, 4°. Indem er nämlich gewisse Produkte aus Sinus oder Sinus und Cosinus der Winkel und Seiten als eigene Funktionen einführte und ihre Gesetze studierte, gelang es ihm, die komplizierten Relationen in übersichtlichere Form zu bringen, die Gesamtzahl der überhaupt möglichen Beziehungen zwischen den Winkeln und Seiten festzustellen und dieselben zuerst auf 19, dann auf die geringste Zahl von 7 notwendigen Gleichungen zu reduzieren. (A. a. O. p. 109—110.) Auch er hat aus seinen allgemeinen Formeln die speziellen für das Dreieck wieder abgeleitet (p. 113—115), indem er 19 Gleichungen angab[1]), die teilweise neu waren. „Aus dem Mangel jener unter den vorstehenden 19 Sätzen, welche hier zum erstenmal gegeben werden",

1) Vgl. dazu Dienger im Archiv für Mathem. VII, 1846, 225—238.

sagt er, „erklärt sich die Dürftigkeit und Unbehülflichkeit der Darlegung in allen bis jetzt über sphärische Trigonometrie erschienenen Schriften." Doch haben, trotz dieser hohen Ansicht, die Müller von dem Werte seiner Formeln für die Dreieckslehre hatte, diese in der Zukunft keine weitere Beachtung gefunden, da ihr wirklicher Wert nur auf theoretischem Gebiete liegt. Übrigens scheint eine Schrift von ähnlicher Bedeutung wie die Müllers für die Lehre von den allgemeinen sphärischen Polygonen später nicht erschienen zu sein, während wohl einzelne Sätze über dieselben auch noch in neuester Zeit, so von G. Bernardi, mitgeteilt wurden.[1])

§ 8. Verschiedene Trigonometrieen und Verallgemeinerungen der goniometrischen Funktionen.

Zum Schlusse unserer geschichtlichen Darstellung wollen wir noch einen raschen Blick auf die Verallgemeinerungen der trigonometrischen Lehren werfen, welche im Laufe des 19. Jahrhunderts entstanden sind. Schon das 18. Jahrhundert hatte den Kreisfunktionen die hyperbolischen Funktionen an die Seite gestellt, und ihre Lehre fand im 19. Jahrhundert so viele Bearbeiter, daß es sich lohnte, die geschichtliche Entwicklung derselben eigens darzustellen. Dies ist von S. Günther in dem vortrefflichen Buche „Die Lehre von den gewöhnlichen und den verallgemeinerten Hyperbelfunktionen", Halle 1881, 8°, geschehen, auf das wir hier um so lieber verweisen, als die hyperbolische Trigonometrie dem von uns behandelten Gebiete ferner steht. Wir wollen nur noch erwähnen, daß sich ein weites Feld für ihre Anwendung in der „nichteuklidischen Geometrie" bot, indem sich die Hyperbelfunktionen am natürlichsten zur Darstellung der Formeln einer nichteuklidischen Trigonometrie oder, was auf dasselbe hinauskommt, einer Trigonometrie auf den Flächen konstanten negativen Krümmungsmaßes eignen.[2])

1) Giornale di Matem. XXIX, 1891, 63—67 und 173—194. Hier mag auch noch erwähnt werden: Stoll, Über sphärische Vielecke, die einem Kreise ein- und einem andern umschrieben sind. Zeitschr. für Mathem. und Phys. XXIX, 1884, 91—110. — 2) Vgl. die Literatur bei Stäckel und Engel: „Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauß, Leipzig 1895, 8°, dann bei S. Günther a. o. a. O. Sehr wichtig sind auch die aus dem Nachlasse von Gauß im VIII. B. seiner Werke 159—268 erst jüngst veröffentlichten Notizen, aus denen zu ersehen ist, daß Gauß spätestens seit 1819 schon im Besitze der wichtigsten Formeln der nichteuklidischen Trigonometrie war. Er leitet nämlich dort die Formeln zwischen den Seiten und Winkeln eines rechtwinkligen Dreiecks ab, die die Lobatschewskijsche und die sphärische Trigonometrie zugleich umfassen, indem er nur voraussetzt, daß die Euklidsche Geometrie für ein unendlich kleines Dreieck gilt (255—257). 1824 fand F. A. Taurinus die nichteuklidische (hyperbolische)

Der hyperbolischen Trigonometrie stellte 1852 James Booth eine parabolische an die Seite[1]), indem er statt der Kreisbögen und der Hyperbelsektoren Parabelbögen als Argument einführte. Dabei ging er von der durch die Gleichung $\operatorname{tg}\omega = \operatorname{tg}\varphi \sec\chi + \operatorname{tg}\chi \sec\varphi$ gegebenen Funktion von φ und χ aus, die er mit $\operatorname{tg}(\varphi \perp \chi)$ bezeichnete, während er $\operatorname{tg}(\varphi \top \chi) = \operatorname{tg}\varphi \sec\chi - \operatorname{tg}\chi \sec\varphi$ setzte.[2]) Hieraus folgt zwischen den drei Argumenten ω, φ, χ die Differentialgleichung $\frac{d\omega}{\cos\omega} = \frac{d\varphi}{\cos\varphi} + \frac{d\chi}{\cos\chi}$, die bei gleichzeitigem Verschwinden der Argumente die Integralgleichung $\int \frac{d\omega}{\cos\omega} = \int \frac{d\varphi}{\cos\varphi} + \int \frac{d\chi}{\cos\chi}$ liefert. Diese drei Integrale stellen aber Parabelbögen dar, welche vom Scheitel der Parabel bis zu Punkten gemessen sind, deren Normalen mit der Achse bezüglich die Winkel ω, φ, χ bilden, und man kann somit auf Grundlage der obigen Relation eine Trigonometrie der Parabel aufbauen[3]), die, wie Booth behauptet, ein richtigeres Analogon der Kreistrigonometrie ist, als die hyperbolische, da bei letzterer die Fläche Funktion eines Parabelbogens ist, während doch Bogen und Fläche eines Kreises durch ein und dieselbe Funktion ausgedrückt werden. In der Tat gehen durch die Substitution

$$\operatorname{tg}\varphi = i\sin\alpha,\quad \operatorname{tg}\chi = i\sin\beta,\quad \operatorname{tg}\omega = i\sin\gamma$$

und Veränderung der Zeichen $\perp$ und $\top$ in $+$ und $-$ die obigen Gleichungen über in $\sin\gamma = \sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$, und neben jede der bekannten trigonometrischen Formeln stellt sich eine analoge der parabolischen Trigonometrie.[4]) Günther hat jedoch in der Schrift: „Parabolische Logarithmen und parabolische Trigono-

Trigonometrie selbständig. Vgl. P. Stäckel, Abh. zur Gesch. der Math. IX, 401—427, sowie Archiv f. Math. IV, 1902, 142. Wieder gegeben wurden die Formeln der nichteuklidischen Trigonometrie von Cayley in den Mathem. Ann. V, 1872, 630. Vgl. auch Story, American Journal IV, 332 und V, 180. Eine elementare Ableitung gab M. Rethy im Archiv für Mathem. LVIII, 1876, 416—422 und neuerdings ohne Benützung der Grenzfläche M. Simon im Journal für Mathem. 1892, CIX, 187—198. Vgl. auch die Vorlesung von F. Klein über „Nichteuklidische Geometrie" 1889/90, 118—120.

1) Die parabolischen Logarithmen behandelte er schon in „The Theory of Elliptic Integrals" etc. 1851, dann die parabolische Trigonometrie in den P. T. von 1852, part II, 385 ff., ferner in „A memoir on the trigonometry of the parabola, London 1856 und endlich in „A Treatise on some new geometrical Methods", London 1873, I, 313. — 2) Die Zeichen $\perp$ und $\top$ werden „logarithmisch plus" und „logarithmisch minus" gelesen. — 3) Vgl. auch G. Egidi in Atti dell, Accad. Pontificia dei Nuovi Lincei, Roma 1894, XLVII, 16—33. — 4) Eine Tabelle, in welcher die Formeln nebeneinandergestellt sind, teilte Booth sowohl in der Abhandlung von 1856, 264 als auch in seinem Buche I, 315 mit. Günther hat dieselbe p. 68 reproduziert, aber des Vergleiches wegen auch noch die entsprechenden Formeln der hyperbolischen Trigonometrie beigeschrieben.

metrie", Leipzig 1882, 8°, gezeigt, daß diese symbolische Trigonometrie der Parabel nicht notwendig in der Natur der Sache begründet ist. Denn legt man die von Lambert gefundene Zuordnung eines hyperbolischen und zyklischen Argumentes, d. h. des gemeinsamen und des transzendenten Winkels (S. 134) zugrunde, so deckt sich die von Booth aufgestellte Symbolik des transzendenten Winkels mit der gewöhnlichen hyperbolischen Goniometrie des gemeinsamen Winkels in allen Einzelheiten.

Die analytische Definition der Kreis- und Hyperbelfunktionen als rechtwinklige Koordinaten eines Punktes der Kurven $x^2 + y^2 = 1$, beziehungsweise $x^2 - y^2 = 1$ gab S. Günther Veranlassung zu einer naheliegenden Verallgemeinerung, welche darin besteht, die rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes der allgemeinen Kurve $x^m \pm y^m = 1$ als neue Funktionen des Winkels, welchen der Radiusvektor mit der x-Achse bildet, einzuführen.[1]) Der Fall $m = 1$ führt auf die von Unverzagt[2]), allerdings von anderem Gesichtspunkte aus gewonnenen longimetrischen Funktionen, welche er durch die sechs Verhältnisse definiert, die bei der Teilung einer Strecke ab durch einen Punkt c im innern oder äußern Verhältnis entstehen.

Hat dagegen der Exponent m in der Kurvengleichung die allgemeine Form $\frac{2p}{2q+1}$, wobei p und q irgend welche positive ganze Zahlen sind, so scheiden sich die oben definierten Funktionen in solche von zyklischem und solche von hyperbolischem Typus, je nachdem sie aus der Kurve $x^m + y^m = 1$ oder aus $x^m - y^m = 1$ entstehen.

Eine andere Verallgemeinerung der Kreis- und Hyperbelfunktionen führte Unverzagt dadurch ein[3]), daß er von einem Punkt A eines Winkels $ABC = \beta$ eine Linie AC unter dem schiefen Winkel λ, statt unter 90° gegen den Schenkel BC zog und die Verhältnisse $\frac{AC}{AB}$, $\frac{BC}{AB}$ u. s. w. als Funktionen des Winkels β definierte. Zur Schreibweise dieser „schiefen trigonometrischen Funktionen" bediente er sich der Zeichen $\mathrm{Sin}\,\beta$, $\mathrm{Cos}\,\beta$, oder $\mathrm{Sin}_\lambda\beta$, $\mathrm{Cos}_\lambda\beta$, so daß $\mathrm{Sin}_{\frac{\pi}{2}}\beta = \sin\beta$ u. s. w. ist. Für den speziellen Fall $\lambda = 0$ ergaben sich dann wieder die oben erwähnten longimetrischen Funktionen, die in der ihnen durch Unverzagt gegebenen Ausbildung in gewisser Beziehung zu den Hamiltonschen Quaternionen stehen. Eine allgemeine Theorie der schiefen Winkelfunktionen hat Biehringer 1877 geschaffen[4]), während

1) A. a. O. Kap. VII. — 2) Theorie der geometrischen und longimetrischen Quaternionen, Leipzig 1876, 8°. — 3) Übrigens findet sich dieser naheliegende Gedanke schon bei Beyssell, Archiv für Mathem. XXXI, 1858, 299 ausgesprochen. — 4) Über schiefe trigonometrische Funktionen und ihre Anwendungen, Nördlingen 1877.

Günther diesen Begriff auf die hyperbolischen Funktionen ausdehnte.[1])

Was die eben erwähnten Quaternionen anlangt, so hat schon ihr Schöpfer William Rowan Hamilton (1805—1865) die neue Rechnung zur Ableitung sowohl der ebenen als der sphärischen trigonometrischen Hauptformeln angewendet[2]), und sein Schüler und Freund P. G. Tait (geb. 1831) hat diese in noch vollständigerer Weise gegeben.[3]). Endlich hat 1880 der Amerikaner J. W. Stringham[4]) in einer kurzen Note darauf aufmerksam gemacht, daß, wenn α, β, δ die Vektorseiten eines rechtwinkligen Dreiecks bilden, und wenn man Quaternionen-Cosinus und -Sinus des Winkels zwischen α und β durch $cq\,{}^{\beta}_{\alpha} = \frac{\alpha}{\beta}$, $sq\,{}^{\beta}_{\alpha} = \frac{\delta}{\beta}$ definiert, dann der Aufbau einer kompletten „Quaternionentrigonometrie" möglich ist, welche Analogieen zu allen den Formeln der gewöhnlichen „Skalartrigonometrie" bietet. So gibt z. B. die Quaternionenformel $sq\,{}^{\beta}_{\alpha} + cq\,{}^{\beta}_{\alpha} = 1$ sofort die Skalarformel $T^2 sq\,{}^{\beta}_{\alpha} + T^2 cq\,{}^{\beta}_{\alpha} = 1$.

Zu den oben erwähnten Verallgemeinerungen der Goniometrie kam noch eine hinzu, welche dadurch entstand, daß man statt des Kreises und der gleichseitigen Hyperbel eine Ellipse, beziehungsweise eine allgemeine Hyperbel zugrunde legte, Cosinus und Sinus wieder als die Koordinaten eines Kurvenpunktes definierte und sie als Funktion des doppelten Sektors auffaßte, der vom Radiusvektor nach dem Kurvenpunkt und von der x-Achse eingeschlossen wird. Zuerst findet sich dieser Gedanke bei Gronau[5]), zu einer vollständigen Theorie ausgearbeitet aber wurde er von C. A. Laisant[6]).

Eine andere Art der Verallgemeinerung trigonometrischer und hyperbolischer Funktionen, für die zahlreiche Versuche vorhanden

1) A. a. O. 365 ff. — 2) Transactions of the R. Irish Academy XXI, 1848 (gelesen 1843), 197 und besonders 278 ff., ferner in Lectures on Quaternions, Dublin 1853, 8°, ebene Cosinusformel Art. 457, sphärische, Art. 524, 526, 829. Die ganze Trigonometrie ist in der Formel enthalten $\gamma^z \beta^y \alpha^x = -1$, Art. 280. Vgl. auch Elements of Quaternions, London 1866, 8°, 210—213 und 367—369; 379—381 findet sich eine Anwendung auf sphärische Polygone. Vgl. ferner Graßmanns Andeutungen in seiner Ausdehnungslehre, Berlin 1862, 213—214. — 3) An elementary treatise on Quaternions, Cambridge 1867, 2. Aufl. 1873, 49, 55, 56—60; siehe auch: P. Molenbröck, Anwendungen der Quaternionen auf Geometrie, Leyden 1893, ferner F. Caspary in Nouv. Ann. 3. S. XVIII, 1899, 265—270 und Hessenberg, Trigonometrie, Leipzig 1899, 8°, die sich der Vektorenrechnung bedienen. — 4) John Hopkins University Circulars I, 1880, 35. — 5) Auflösung der kubischen Gleichungen durch trigonometrische Funktionen des Kreises und der Hyperbel, Danzig 1861. — 6) Essai sur les fonctions hyperboliques, Paris 1874, 37 ff.

sind, liegt auf rein funktionentheoretischem Gebiete und bestand darin, daß man aus den sie definierenden Potenzreihen neue bildete, indem man z. B. in bestimmten Zwischenräumen Glieder wegließ und aus den übrigbleibenden Reihen die Eigenschaften der durch sie dargestellten Funktionen entwickelte. Indem wir bemerken, daß diese Untersuchungen bis auf Vincenzo Riccati zurückgehen, verweisen wir, da sie für uns zu fern liegen, auf das 9. Kap. von S. Günthers schon oft erwähntem Werk, worin wenigstens die wichtigsten Arbeiten hierüber besprochen sind.[1])

Erwähnung mögen auch noch einige Versuche zur geometrischen Darstellung der trigonometrischen Funktionen komplexer Variabeln finden, während die Untersuchungen über diese Funktionen selbst sich der allgemeinen Theorie der Funktionen einer komplexen Variabeln unterordnen und daher für uns nicht weiter in Betracht kommen. Gaston Tarry hat 1889—91 in der Association Française[2]) eine „Géométrie générale" entwickelt, indem er sich die Aufgabe stellte, auch die imaginären Elemente einer reellen Ebene durch sichtbare Symbole darzustellen. Seine Theorie, die viel Berührungspunkte mit Staudts Geometrie des Imaginären hat, ordnet sich ganz dem Euklidschen System unter, so daß z. B. nach der Definition der Entfernung zweier Punkte der Kreis wie bei Euklid definiert werden kann und die trigonometrischen Funktionen als die nämlichen Linienverhältnisse wie im Reellen erscheinen.

Eine geometrische Interpretation der Formeln der sphärischen Trigonometrie hat endlich Fr. Schilling 1891 gegeben.[3]) Sind $\lambda_\alpha = \lambda'_\alpha + i\lambda''_\alpha$ die Winkel und $l_\alpha = l'_\alpha + i l''_\alpha$ ($\alpha = 1, 2, 3$) die Seiten eines sphärischen Dreiecks oder die Seiten- respekt. Flächenwinkel des ihm zugehörigen Dreikants, und betrachtet man drei windschiefe Gerade G_α ($\alpha = 1, 2, 3$), die die Kugel in reellen Punkten schneiden, so kann man die drei innern kürzesten Abstände konstru-

1) Zur Ergänzung dieser Literaturangaben können noch folgende Bemerkungen dienen. Der erste, der sich nach Riccati mit höheren Sinus beschäftigte, scheint Höne-Wronski (1775—1853) gewesen zu sein. An ihn knüpft Yvon Villarceau wieder an, der in den Comptes rendus de l'Académie de Paris mehrere Abhandlungen über die höheren Sinus veröffentlichte: LXXXVI, 1878, 1160—1166, 1216—1222; 1287—1290, XCI, 1880, 195—197. Ferner sind noch zu erwähnen Appell ebenda 1877a, 540 und 1378, dann J. Farkas, XCI, 1880, 209—211; 278—281; 544—547. Royaux XCII, 1881, 1276—1279. — Die älteren Arbeiten von Olivier, Hellwig u. a. hat schon Günther angeführt. — 2) Assoc. Franç. pour l'avancement des sciences, XVIII, 1889, 60—87; XIX, 1890, 182—185; XX, 1891, 90—117, und zwar stehen hier die Definitionen der trigonometrischen Funktionen. — 3) Göttinger Nachrichten 1891, 188—190, oder Mathem. Annalen XXXIX, 1891, 598—600.

ieren, welche im Sinne der auf die Kugel zu gründenden projektiven Maßbestimmung zwischen je zweien derselben vorhanden sind. Bezeichnet man dann mit λ'_α den Winkel der beiden Ebenen, welche durch G_α und die zu ihr gehörigen beiden kürzesten Abstände gehen und reziprok mit l'_α den Winkel der beiden Ebenen, die sich durch je einen der kürzesten Abstände und die zugehörigen beiden Geraden legen lassen, setzt ferner die durch jene Abstände auf den G_α abgeschnittenen Längen $= i\lambda''_\alpha$ und die Längen der kürzesten Abstände selbst $= il''_\alpha$, so bestehen zwischen den sechs Größen $\lambda_\alpha = \lambda'_\alpha + i\lambda''_\alpha$ und $l_\alpha = l'_\alpha + il''_\alpha$ gerade die Relationen der gewöhnlichen sphärischen Trigonometrie.[1])

Hervorgegangen ist diese Interpretation, deren Beweis Schilling 1894 mitteilte[2]), aus einem von Hamilton[3]) stammenden Satze, den er in geschickter Weise zu erweitern verstanden hat.

Wir haben bisher, wie es unumgänglich notwendig war, um nicht ins Ungemessene zu geraten, die Anwendungen der Trigonometrie ganz von unsern Betrachtungen ausgeschlossen, doch können wir nicht umhin, zum Schlusse unserer Darstellung auf das neben der Astronomie umfassendste Anwendungsgebiet wenigstens hinzuweisen, indem wir eine eingehende geschichtliche Darstellung, die sehr wünschenswert wäre, andern überlassen. Wir meinen damit die sogenannte höhere Geodäsie, insofern sie nicht mehr die Kugelfläche, sondern die sphäroidisch gekrümmten Flächen oder Flächen mit beliebiger Krümmung als Operationsfeld wählt.

Die Grundzüge der sphäroidischen Trigonometrie sind schon im 17. Jahrhundert durch Clairaut[4]) und Euler[5]) geschaffen worden, eine zusammenhängende systematische Bearbeitung aber gab erst Grunert[6]) im Jahre 1833. Derselbe schuf auch 1849 die für die Schiffahrtskunde wichtige loxodromische Trigonometrie unter Voraussetzung einer sphäroidischen Gestalt der Erde, wobei an Stelle der geodätischen Linie die schon von Nonius im 16. Jahrhundert gefundene Loxodrome oder die „Rhumbslinie“[7]) trat.

1) Vgl. die Darstellung des Zusammenhangs dieser Interpretation mit der Auffassung der sphärischen Formeln als der Invarianten dreier quadratischer Formen und ihrer Funktionaldeterminanten bei F. Klein „Über die hypergeometrische Funktion“, 1894. — 2) Mathem. Ann. XLIV, 1894, 198—203. — 3) Lectures on Quaternions, Dublin 1853, Art. 524, 526 und 529. — 4) Mémoires de l'Académie de Paris 1733, 1739. — 5) Mémoires de l'Académie de Berlin 1753, 258 ff. — 6) Sphäroidische Trigonometrie, Berlin 1833, 4°. — 7) Grunert, Loxodromische Trigonometrie, Leipzig 1849, 8°. Bezüglich Pedro Nuñez oder Nonius (1492—1577) vgl. Cantor II_2, 390. Nonius nannte diese Linie „rumbus“, daher die deutsche Bezeichnung, während Loxodrome von W. Snellius herrührt.

Was die Trigonometrie auf beliebig gekrümmten Oberflächen anlangt, so kennt jeder Mathematiker den grundlegenden Aufsatz von Gauß, die „Disquisitiones generales circa superficies curvas“, 1827, die, aus praktischen Untersuchungen, wie sie die Gradmessung mit sich brachte, entstanden, eine umfassende Literatur ins Leben riefen und Fragen anregten, die in gewissem Sinne auch zu den Grundzügen einer Trigonometrie beliebiger Oberflächen führten.

Wir schließen unser Werk mit einem Rückblick auf die Fortschritte des vergangenen Jahrhunderts. Die Aufgabe desselben konnte nach den großartigen Leistungen Eulers und seiner Zeitgenossen nur in einer Vertiefung und Ausgestaltung der errungenen Resultate bestehen, und so sehen wir denn auch, wie man sich bemühte, das Verhalten der noch lange geometrisch gedeuteten Funktionen in den verschiedenen Quadranten festzustellen, wie man das durch Klügel als fundamental erkannte Additionstheorem allgemein zu begründen suchte und wie man bis in die neueste Zeit herein bemüht war, die beiden Trigonometrieen auf einer möglichst einfachen, aber sicheren Basis aufzubauen. Sogar die hervorragendsten Mathematiker, wie Gauß und Möbius, interessierten sich hierfür und widmeten namentlich der Ausdehnung des Gültigkeitsbereiches der sphärischen Formeln ihre Kraft. Andererseits war durch die vollendete Ausbildung der analytischen Rechnung die Möglichkeit zum systematischen Ausbau der trigonometrischen Formeln gegeben. Diese wurden namentlich durch die beiden wichtigen Gruppen der Delambreschen und der L'Huilierschen Gleichungen vermehrt, deren eigentümliche Stellung den andern gegenüber erst in den letzten Jahren durch die scharfsinnigen Untersuchungen Studys präzisiert werden konnte. Neben diesen theoretisch und praktisch wertvollen Systemen, die noch unter Verwendung der elliptischen Funktionen und der Invariantentheorie Zuwachs an andern Formelgruppen erfuhren, vermehrte aber auch eine Menge kleinerer Beiträge den Besitzstand der sphärischen Trigonometrie und der Goniometrie, und die Sätze zur Berechnung kleiner sphärischer Dreiecke, die Maskelynesche Regel und die Differentialformeln fanden wichtige Ergänzungen. Die durch Lagrange geschaffene, durch Cauchy ausgebildete Funktionentheorie legte die Notwendigkeit einer rein analytischen Begründung der Lehre von den Winkelfunktionen nahe, welche bis auf die Gegenwart auf verschiedene Art versucht wurde; die Konvergenzuntersuchungen der trigonometrischen und zyklometrischen Reihen und die einwandfreie Darstellung der Funktionen durch Produktentwicklungen gehören ebenfalls dem 19. Jahrhundert an, das auch den endgültigen Beweis für die Unmöglichkeit der Lösung des Quadraturproblems durch algebraische Prozesse erbrachte.

Die Präzision, welche, durch **Gauß** veranlaßt, im 19. Jahrhundert immer mehr angestrebt wurde, zeigte sich auch in der Verbesserung der Tafeln, die in immenser Zahl erschienen, in den Methoden zur Berechnung der Funktionen auf hohe Stellenzahl und in der Schaffung einer eigenen Fehlertheorie der Logarithmentafeln. Die Polygonometrie und Polyedrometrie, das einzige der zahlreichen Anwendungsgebiete trigonometrischer Rechnung, das wir in unsere Darstellung aufnehmen zu müssen glaubten, fand ebenfalls detaillierte Bearbeitung, und in der Tetraedrometrie wurde sogar der Versuch gemacht, auf dem Tetraeder als Grundlage eine Raumtrigonometrie aufzubauen. Ferner bot sich die Gelegenheit, die Lehre von den trigonometrischen Funktionen nach verschiedenen Richtungen zu erweitern und zu verallgemeinern; so entstand eine hyperbolische und eine parabolische Trigonometrie, es entstanden die longimetrischen und die schiefen Winkelfunktionen, die mit **Hamiltons** Quaternionen und **Graßmanns** Ausdehnungslehre in Beziehung stehen, und andere mehr. Endlich hatte die Ausbildung der höheren Geodäsie nahe gelegt, eine Trigonometrie auf beliebig gekrümmten Oberflächen zu schaffen, deren Grundzüge der unsterbliche **Gauß** in klassischer Weise festlegte.

Berichtigungen und Ergänzungen.

S. 27, Zeile 10 lies Tafel der Logarithmen der Zahlen.

S. 28, Anm. 6 lies **Prümm**.

S. 152, Anm. 1 sollte zitiert sein: R. **Mehmke**, Jahresbericht der Mathematikervereinigung VIII, 1900, 141 und 145—146 Anm. 16, sowie 149, Anm. 20.

S. 157 ist in Zeile 4—5 „für sehr kleine Bogen" und in Zeile 7 „sogar" zu streichen. Die Reihe in Zeile 11 muß heißen:

$$\cos 1' = 1 - \frac{1}{2 \operatorname{cosec}^2 1'} - \frac{1}{8 \operatorname{cosec}^4 1'} - \cdots;$$

in Zeile 12 lies Cosekante statt Sekante.

S. 173, Zeile 5—6 lies „sphärischen Trigonometrie" statt „Raumtrigonometrie".

S. 193, Anm. 4 lies **Paul Serret** statt J. A. **Serret**.

S. 216, Zeile 11 soll stehen „Y. Villarceau" statt J. v. Villarceau" und Zeile 12 e^x statt e.

Namen- und Sachregister.

C.

D.

H.

I.

J.

K.

L.

M.

N.

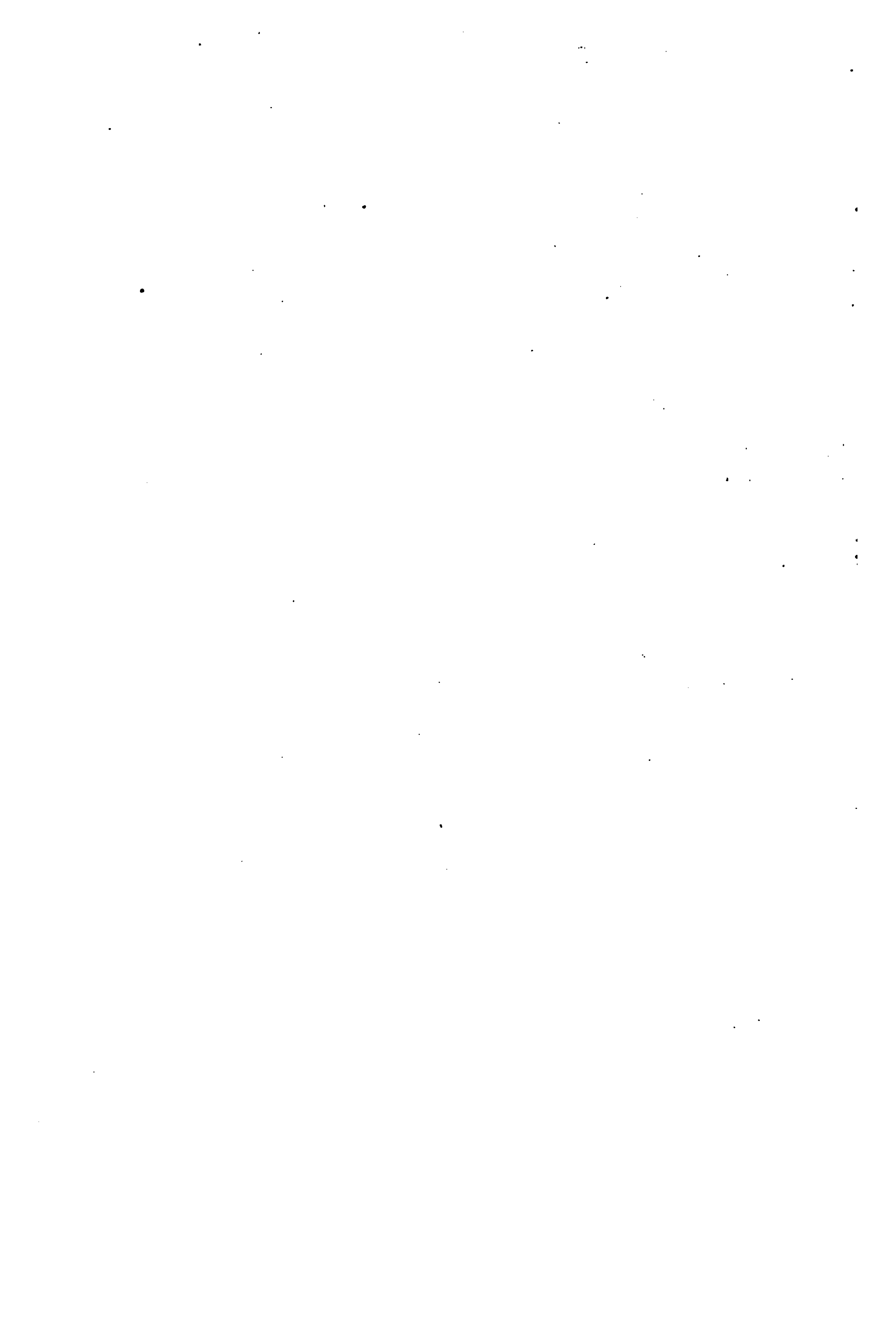
O.

P.

Q.

R.

S.



This book should be returned to the Library on or before the last date stamped below.

A fine is incurred by retaining it beyond the specified time.

Please return promptly.

MAR 20 ILL
40608-78

JUN 5 '72 H
79064
CANCELLED